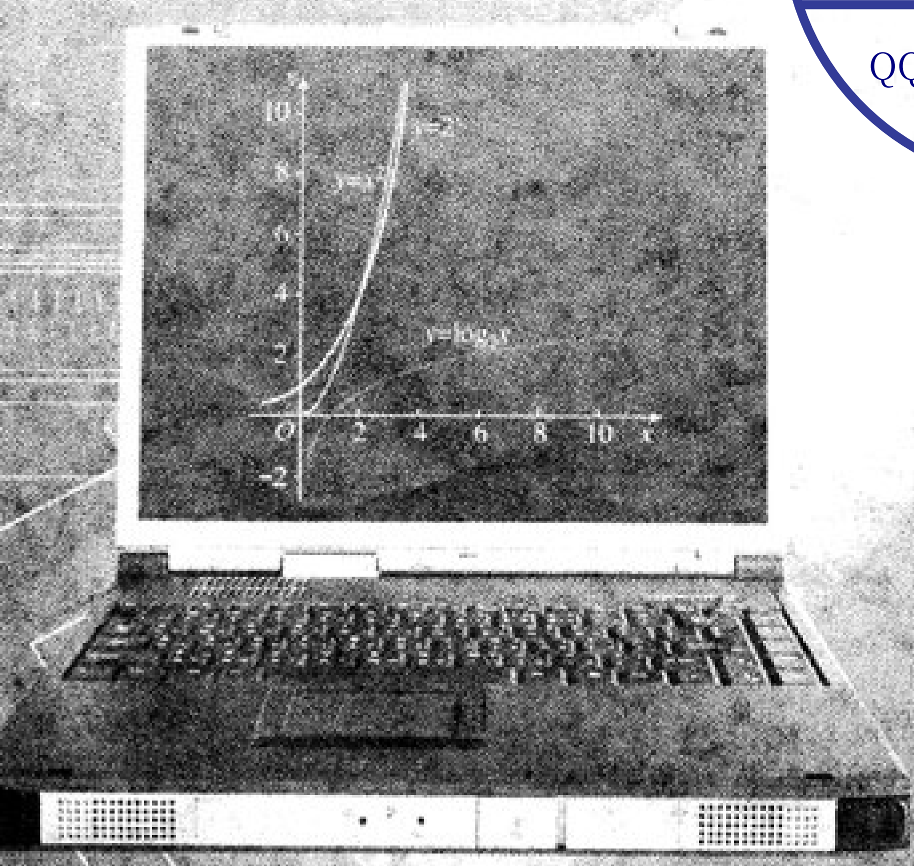
普通高中课程标准实验教科书

数学 ①

必修

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书
数学1 必修 A版
教师教学用书
人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著
*
人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街55号 邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销
*
开本：890毫米×1 240毫米 1/16 印张：8.5 字数：212 000
2004年6月第1版 2004年8月第1次印刷
ISBN 7-107-17860-1
G·10949（课） 定价：7.90元

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列1～5以及选修1、2中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的Peano公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想与聚类分析思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过1，几何中的度量却不受这种限制．

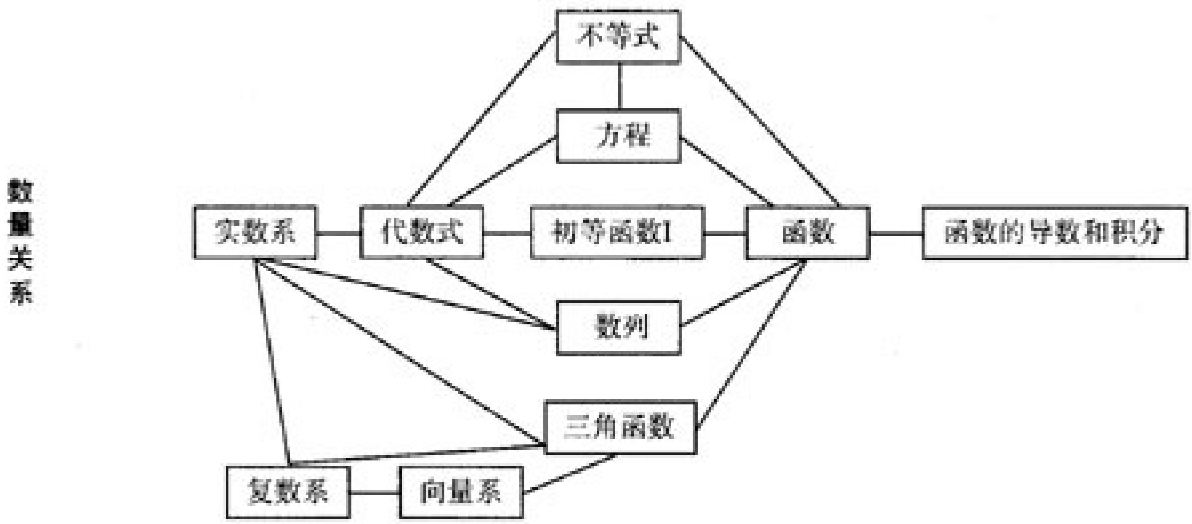
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用

计算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

"数量关系"

"数量关系"所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系 实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系 复数及其运算. 由实数扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）.

向量系 向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对 (x, y)，而空间中向量的坐标是三实数组 (x, y, z). 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+xi+yj+zk)$，而其中的 $xi+yj+zk$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是"数"（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等）.

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数式 用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程 令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式 把方程中的"="换成实数系所特有的">"（或"<"）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有"同解"变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$ 的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$ 取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于0处的"边界点"类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的"边界". ">"的性质比"="的性质"坏"许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数Ⅰ 令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数，即对数函数.

数列　　数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数　　描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引人锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

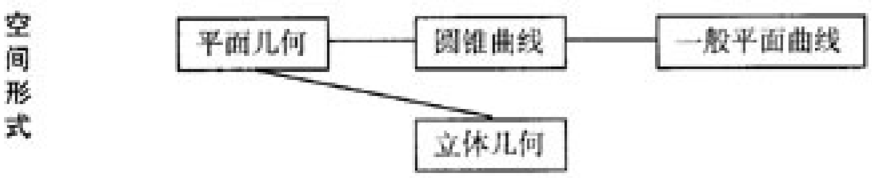
函数　　函数及函数的运算（＋、－、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，揭示中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分　　虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何　　讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线　　在中学，给出它们的几何定义后，便用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何　　线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线　　虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

“数形结合”

用三角函数解三角形 参看 **三角函数**．把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果．举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a, b, C)$．如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算．

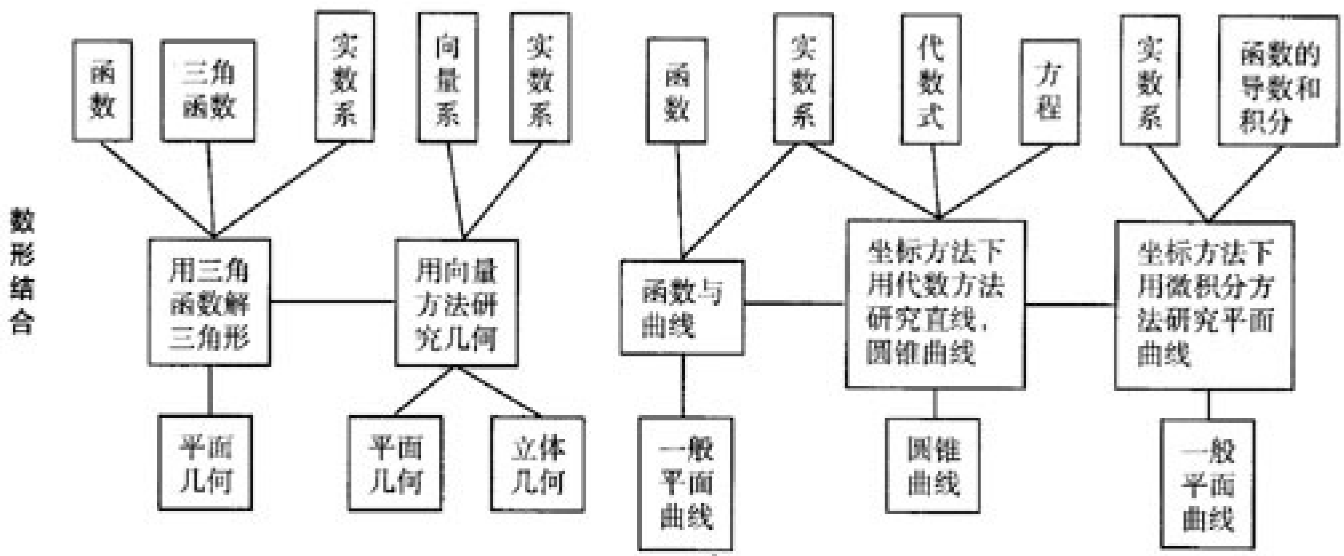
用向量来研究几何 用向量及其运算为工具．用向量方法研究几何，可概括为“三步曲”：用向量表示出问题中关键的点，线，面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决．

函数与曲线 贯穿中学数学的一对孪生姐妹．

坐标方法下用代数方法研究直线，圆锥曲线 用数及其运算为工具．用代数方法研究几何，可概括为“三步曲”：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点，距离，直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决．

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线 用导数和积分为工具．用分析方法研究曲线．在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积．而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了．微积分是研究曲线的强大工具．

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法．它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了．

1．数和数的运算是一切运算系统的标兵．让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感．

2．函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点．参看**函数**．

3．把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等．

4．把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形．直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等．一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了．

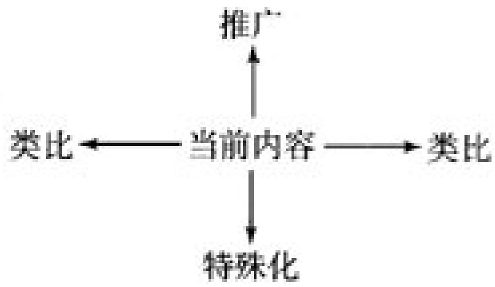
5．“恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从“好”的形式中看出其本质．这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等

变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等.

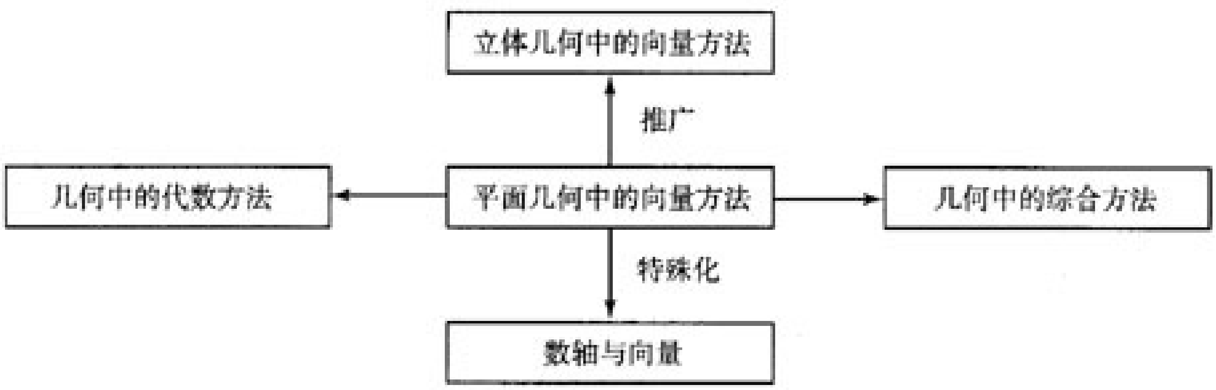
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个"公理体系"，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的"灵魂"，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的"联系图"：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述"联系图"的引导下，就会自然地提出"能否用向量方法研究圆锥曲线""能否用综合法研究圆锥曲线"这样的问题.

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现基础性、时代性、典型性和可接受性等，具有如下特点：

1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念和结论，数学的思想和方法，以及数学应用的学习情境，使学生产生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

3．“科学性”与“思想性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神．

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$\begin{tikzcd} & \text{推广} & \\ \text{类比} & \text{当前内容} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \text{类比} \\ & \text{特殊化} & \end{tikzcd}$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数

学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流.

4. “时代性”与“应用性”：以具有时代性和现实感的素材创设情境，加强数学活动，发展应用意识.

利用具有时代气息的、反映改革开放、市场经济下的社会生活和建设成就的素材创设情境，引导学生通过自己的数学活动，从事物中抽取“数”“形”属性，从一定的现象中寻找共性和本质内涵，并进一步抽象概括出数学概念、结论，使学生经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉. 教科书设置了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”“用数学”的意识.

5. “联系性”：以有层次和完整的结构，提供多种选择；将配套教材作为教材建设的有机组成部分.

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目.

1. 总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想. 包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议、教科书编写意图与教学建议等.

（1）课程目标与学习目标说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

（2）本章知识结构框图展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

（3）内容安排说明按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系，并对本章的重点、难点进行说明；

（4）课时安排建议根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整.

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明了编写意图. 主要包括：本节知识结构、重点、难点、教科书编写的意图与教学建议等.

（1）本节知识结构讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）. 说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

（2）重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

（3）难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

（4）编写意图与教学建议主要对教科书"为什么要这样写"进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对"观察""思考""探究"中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

（1）教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

（2）教学重点、难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

（3）教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；

（4）教学情境设计以"问题串"为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚"可以这样解"，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明"为什么可以这样解"，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

本书是必修课程数学 1 的教师教学用书，包含集合与函数概念，基本初等函数（Ⅰ），函数的应用三章内容，它们是学习后继必修系列和选修系列的基础. 全书共 36 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第 1 章　集合与函数概念	约 13 课时
第 2 章　基本初等函数（Ⅰ）	约 14 课时
第 3 章　函数的应用	约 9 课时

除已列出的主要编写者外，为本书提供部分教学设计案例和习题解答的有：崔海友、张振国、廖燕芳、李湖南、史强，参加本书讨论的有：张劲松、宋莉莉，审稿：蒋佩锦.

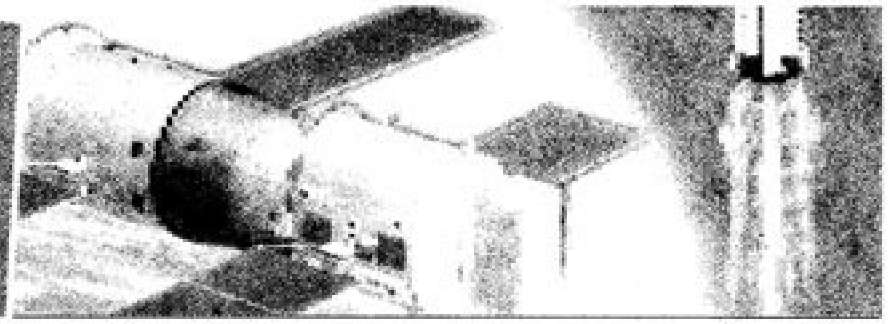
我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：钱珮玲
主要编者：郭慧清　章建跃　钱珮玲　王　嵘
责任编辑：王　嵘
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

目 录

第一章
集合与函数概念



I 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

集合语言是现代数学的基本语言. 高中数学课程将集合作为一种语言来学习. 通过本模块的学习，使学生学会使用最基本的集合语言表示有关数学对象，并能在自然语言、图形语言、集合语言之间进行转换，体会用集合语言表达数学内容的简洁性、准确性，发展运用集合语言进行交流的能力.

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型. 通过本模块的学习，使学生不仅把函数看成变量之间的依赖关系，同时还会用集合与对应的语言刻画函数，感受用函数概念建立模型的过程与方法，为后续学习奠定基础.

2. 学习目标

（1）集合的含义与表示

① 通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系.

② 能选择自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

（2）集合间的基本关系

① 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集.

② 在具体情境中，了解全集与空集的含义.

（3）集合的基本运算

① 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集.

② 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

③ 能使用 Venn 图表达集合的关系及运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用.

（4）函数及其表示

① 进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型，能用集合与对应的语言刻画函数，体会对应关系在刻画函数概念中的作用；了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念.

② 会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数.

③ 通过具体实例了解简单的分段函数，并能简单应用.

（5）函数的性质

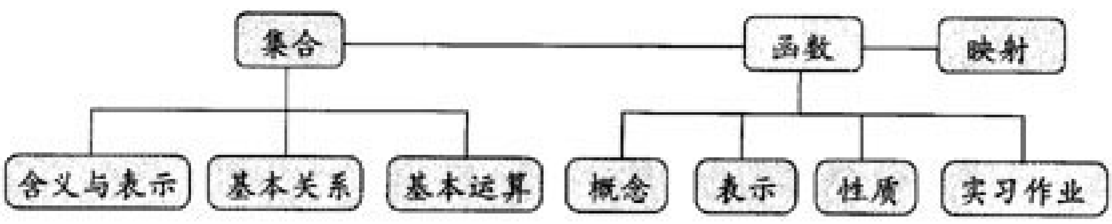
① 理解函数的单调性、最大（小）值及其几何意义；结合具体函数了解奇偶性的含义.

② 能运用函数图象理解和研究函数的性质.

（6）了解17世纪前后发生的一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物（开普勒、伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、欧拉等）的有关资料或现实生活中的函数实例.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分3节：1.1 集合，1.2 函数及其表示，1.3 函数的性质. 另外还有一个实习作业.

（1）集合论是现代数学的一个重要的基础. 在高中数学中，集合的初步知识与其他内容有着密切的联系，是学习、掌握和使用数学语言的基础. 教科书从学生熟悉的集合（自然数的集合、有理数的集合等）出发，结合实例给出元素、集合的含义；通过类比实数间的大小关系、运算引入集合间的关系、运算，同时，结合相关内容介绍子集和全集等概念. 在安排这部分内容时，教科书注重体现逻辑思考的方法，如概括、类比等.

（2）函数是中学数学中最重要的基本概念之一. 在中学，函数的学习大致可分为三个阶段. 第一阶段是在义务教育阶段，学习了函数的描述性概念，接触了正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数等简单的函数，了解了它们的图象、性质等. 本章学习的函数概念、基本性质与后续将要学习的基本初等函数（Ⅰ）和基本初等函数（Ⅱ）是函数学习的第二阶段，这是对函数概念的再认识阶段. 第三阶段是选修系列的导数及其应用的学习，这是函数学习的进一步深化和提高.

在安排这部分内容时，教科书先从实例抽象概括出用集合与对应语言刻画的函数概念，然后把函数推广到映射. 教科书加强了数形结合、几何直观等数学思想方法的渗透，加大了与信息技术整合的力度. 例如，明确提出借助计算器或计算机画一些函数的图象、探索函数的性质的要求.

（3）本章安排的实习作业，主要是让学生收集17世纪前后发生的一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物（开普勒、伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、欧拉等）的有关资料.

三、课时分配

本章教学时间约需13课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　集合	约4课时
1.2　函数及其表示	约4课时
1.3　函数的性质	约3课时

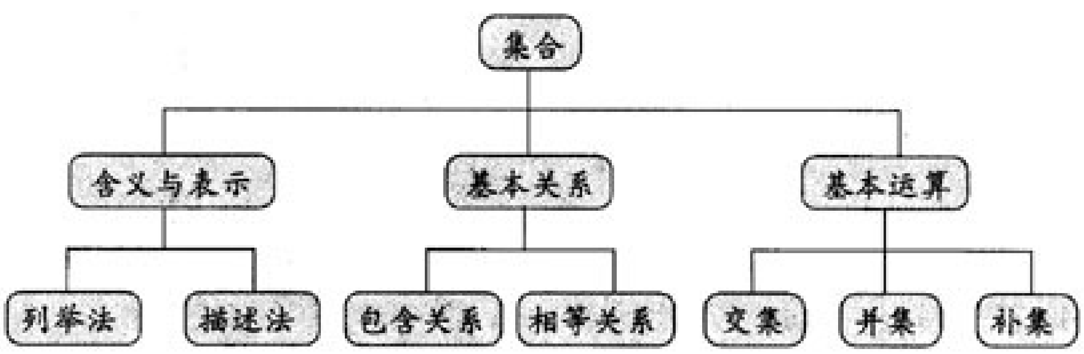
实习作业　约 1 课时
小结　约 1 课时

II 教科书分析

本章的章头图表现了运载“神舟”五号载人航天飞船的火箭升空，以及“神舟”五号载人航天飞船进入预定轨道后在太空飞行的场景．其中包含了一些可以用函数描述的变化规律，如上升过程中飞船离地面的距离随时间的变化而变化，飞船外的温度和气压随飞船与地面的距离的变化而变化，等等．事实上，现实世界中的许多变化规律都可以用函数模型刻画．教学时，可以多提供一些例子，为学生建立函数概念提供更多的背景支持．章引言概述了本章要学习的主要内容，强调了函数在数学以及各领域中的重要地位与作用，而集合在本教科书中的定位只是作为简洁、准确地表达数学内容的基本语言．

1.1 集　合

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是使学生了解集合的含义，理解集合间包含与相等的含义，理解两个集合的并集与交集的含义，会用集合语言表达数学对象或数学内容．

学生学习本节时可能会在以下两个方面感到困难：

1. 区别较多的新概念及相应的新符号，例如区别元素与集合、属于与包含、交集与并集等概念及其符号表示；

2. 表示具体的集合时，如何从列举法和描述法中做出恰当的选择．

三、编写意图与教学建议

数学知识包括数学的概念、公式、法则、定义、定理等及由其内容所反映的数学思想方法．在集合内容的安排中，教科书除了介绍集合的基本知识，还特别注意渗透概括与类比这两种常用的逻辑思考方法．教学时，建议引导学生从大量实际例子中去抽象概括集合的含义，并通过类比数的大小关系和运算联想集合的基本关系和运算，让学生体会人们学习新知识的基本思维方法，如概括、类比、联想等．

集合语言是一种抽象的数学语言，学习集合语言最好的方法是使用，建议教学时多创设让学生运用集合语言进行表达和交流的情境和机会，以便学生在实际使用中逐渐熟悉自然语言、集合语言、图形语言各自的特点，能进行相互转换并掌握集合语言．例如，用集合表示方程的解或简单不等式的解，将方程组的解或简单不等式组的解与集合的运算相联系，等等．在学习集合间的关系和运算时，建议重视使用 Venn 图，这有助于学生体会直观图示对理解抽象概念的作用．

学习有关集合初步知识的主要目的也在于使用．具体地说，就是能读懂面临问题中的集合概念和符号；在处理实际问题时，能根据需要，运用集合语言进行表述．在安排训练时，建议把握好分寸，不宜搞偏题、怪题．

1.1.1　集合的含义与表示

教科书首先从 8 个集合实例入手引入元素和集合的含义，随后介绍了一些特殊集合的记号，最后介绍了集合的两种表示方法——列举法与描述法．

1. 元素和集合的含义．

（1）集合是一个原始的、不定义的概念．教科书上给出的“一般地，我们把研究对象统称为元素(element)，把一些元素组成的总体叫做集合（set）（简称为集）”只是对集合的描述性说明．在开始接触集合时，主要还是通过实例，让学生了解其含义．教科书第 2 页上安排的“思考”，其目的是让学生思考 8 个背景例子的共同特征，概括出元素和集合的含义．

（2）在了解集合的含义时，要考虑集合中元素的两个性质，即确定性（给定的集合，它的元素必须是确定的）和互异性（一个给定集合中的元素是互不相同的）．教科书第 3 页上的“思考”，目的是引导学生体会集合的“确定性”与“互异性”．教学时，除了教科书上的例子，教师还可以多举些形如“好看的衣服”等不是集合的例子加以说明，也可以让学生自己举些例子加以说明．

2. 元素、集合及其关系的表示．

元素、集合的字母表示，以及元素与集合之间的“属于”或“不属于”关系，建议让学生在具体运用中逐渐熟悉．教科书中给出的常用数集的记法是国家标准．其中，新的国家标准规定自然数集 **N** 含元素 0，即自然数集与非负整数集是相同的，这是与国际标准化组织（ISO）制订的国际标准相衔接的．

3. 列举法和描述法的教学分析．

（1）教科书中的例 1，不仅要使学生明白用列举法表示集合的方法，同时还要让学生知道集合中元素的列举与元素顺序无关，即集合的无序性．教学时，还可以举一些别的例子，如用列举法表示甲乙两个足球队比赛时所有甲方队员组成的集合等．

(2) 教科书在介绍描述法前给出了第 4 页的“思考”，其目的是让学生认识到仅用列举法表示集合是不够的，由此说明学习描述法的必要性．学习描述法时，可让学生针对具体的集合，先用自然语言表述集合的元素具有的共同属性，再介绍用描述法表示集合的方法．

(3) 教科书给出了两种集合的表示方法：列举法，描述法．教科书中的例 2，不仅要让学生学习两种表示法，同时还要让学生体会如何恰当选择表示法表示集合．列举法与描述法各有优点，应该根据具体问题确定采用哪种表示法．一般情况下，对有限集，在元素不太多的情况下，宜采用列举法，它具有直观明了的特点；对无限集，一般采用描述法表示．教学时，可以让学生选择表示法表示本小节开始时的 8 个例子，并可完成教科书第 6 页练习第 2 题．

(4) 本小节第 6 页安排的“思考”，目的是让学生反思、总结前一阶段的学习，体会不同语言的特点．建议教学时，多提各种问题，启发学生关注知识间的联系与区别，能根据问题情境适时地进行语言间的转换．

4. 值得注意的问题．

本小节的新概念、新符号较多，建议教学时先引导学生阅读教科书，然后进行交流，让学生在阅读与交流中理解概念并熟悉新符号的使用．在信息技术条件比较好的学校，可以利用网络平台让学生交流阅读后的认识；也可以由教师给出问题，让学生阅读后回答问题，再由教师给出评价．这样做的目的，在于培养学生主动学习的习惯，提高阅读与理解、合作与交流的能力．

1.1.2 集合间的基本关系

本小节包含两个集合间的包含与相等关系，子集、真子集与空集等概念，表示这些关系与概念的符号，以及集合的 Venn 图表示．

1. 类比数的关系，学习集合间的基本关系．

(1) 教科书用“思考”（第 6 页）启发学生类比熟悉的两个实数之间的关系，联想两个集合之间的关系．这种由某类事物已有的性质，以类比、联想的方式猜想另一类相似事物的性质，是数学逻辑思考的重要思维方法．这种“思考”在本套教科书的很多地方出现，教学时应抓住机会让学生充分思考和积极探索，并鼓励他们说出自己的想法．

(2) 在学生类比并对两个集合间的关系有了某些想法后，教科书通过分析三个具体例子的共同特点给出了集合间的包含关系．教学时，建议先让学生自己观察、发现相应的共同特点，然后再给出包含关系的定义．

(3) 在包含关系及相关概念（如子集、真子集）的教学中，建议让学生从三个方面理解它们：自然语言，符号语言，图形语言（Venn 图）．例如，用自然语言描述子集：如果 A 是 B 的子集，那么集合 A 中的任一元素都是集合 B 中的元素，反之亦然；用符号语言描述子集：$A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x\in A,\ x\in B$；用图形语言描述子集即教科书中的图 1.1-1．

(4) Venn 图可以形象直观地表示集合间的关系，教学时只要让学生知道表示集合的 Venn 图的边界是封闭曲线，它可以是圆、矩形，也可以是其他封闭曲线等即可．

(5) 集合的相等在 1.1.1 中是用元素完全相同描述的，在这里，是从子集的角度提升对集合相等的理解，建议在教学中逐步让学生掌握如下关系：

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B,\ \text{且}\ B\subseteq A.$$

(6) 建议类比数的大小关系的结论，让学生自己说出本小节第 8 页给出的两个结论．

实　　数	集　　合
对于实数 a，有 $a\leqslant a$；	对于集合 A，有 $A\subseteq A$.
对于实数 a、b、c，如果 $a\leqslant b$，且 $b\leqslant c$，那么 $a\leqslant c$；	对于集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

2. 例题和习题的教学分析.

（1）在学习了集合间的基本关系后，可以让学生试着用关系符号连接 1.1.1 中介绍的常用集合. 本小节的例 3 不仅可以让学生加深对子集、真子集及包含关系的理解，同时，还可以让学生学习分类的思想方法. 这里是按子集的元素个数为标准进行分类的，共分三类，即不含（或 0 个）元素的为一类：$\varnothing$；1 个元素的为一类：$\{a\}$、$\{b\}$；2 个元素的为一类：$\{a, b\}$.

（2）练习中的第 1 题，是与例 3 配套的；第 2 题除了让学生熟悉正确使用符号外，还要让学生进一步熟悉集合的列举法与描述法；第 3 题不仅要让学生学会判断两个集合之间是否具有包含关系，同时，还要让学生进一步学会集合的两种表示方法间的互相转化.

3. 值得注意的问题.

（1）空集是较难理解的一个抽象概念，教学时宜多举些方程无解，不等式无解这样的例子.

（2）第 8 页“思考”的目的是让学生关注以下事实：包含关系发生在两个集合之间，而属于关系发生在元素与集合之间. 建议教学时引导学生区分一些容易混淆的关系和符号. 例如，

$\in$ 与 $\subseteq$ 的区别：$\in$ 表示元素与集合之间的关系，如 $1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$；$\subseteq$ 表示集合与集合之间的关系，如 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$；

a 与 $\{a\}$ 的区别：一般地，a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的一个集合. 因此，有 $1\in\{1, 2, 3\}$，$0\in\{0\}$，$\{1\}\subseteq\{1, 2, 3\}$ 等，不能写成 $0=\{0\}$，$\{1\}\in\{1, 2, 3\}$，$1\subseteq\{1, 2, 3\}$.

1.1.3　集合的基本运算

本小节介绍了集合的三种基本运算，以及全集的概念.

1. 类比数的加运算，学习集合的并运算.

（1）与前一小节类似，教科书强调了集合的基本运算与实数的基本运算之间的类比. 第 9 页给出的“思考”，是让学生从实数的加法运算出发，通过类比的方法，联想集合的某种运算. 在此基础上，教科书以两个具体的例子为载体引入集合的并运算.

（2）对于两个集合并集的理解，不仅要会用自然语言描述，还要学会用符号表示，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A, 或 x\in B\},$$

以及图形表示（Venn 图 1-1）：

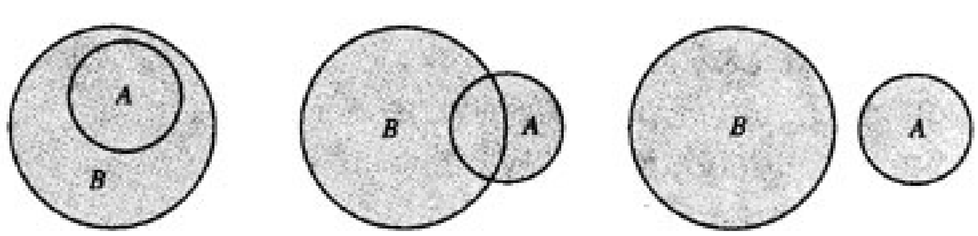


图 1-1

（3）在学习两个集合的并集时，建议让学生思考：为什么相同的元素只出现一次？这样不仅可以

让学生知道这个规定是集合的互异性所要求的，而且还可以让学生体会数学上的规定要讲逻辑顺序，培养学生有条理地思考的习惯.

2. 结合实例学习集合的交、补运算.

（1）对于第 10 页上的“思考”，相应于前面类比数的加法运算，学生可能会联想到集合的“减法”. 此时，可以肯定学生的想法，告诉他们与数的减法相类似的集合的差运算会在大学中学习. 为了便于学生思考，教师可以从“并”运算对应于“或”，即 $A\cup B$ 中的元素“或在 A 中，或在 B 中”，提出问题“既在 A 中，又在 B 中的所有元素组成什么集合?”，由此引出集合的“交”运算.

（2）交集的教学，应充分发挥教科书中例子的作用，并可以结合班级的实际情况对(2)进行改编. 此外，还可以让学生自己举些例子. 同样地，此处也建议从三个方面理解交集、补集的含义：自然语言、符号表示、图形表示. 例如通过 Venn 图 1-2 让学生意识到公共部分与交集的关系：

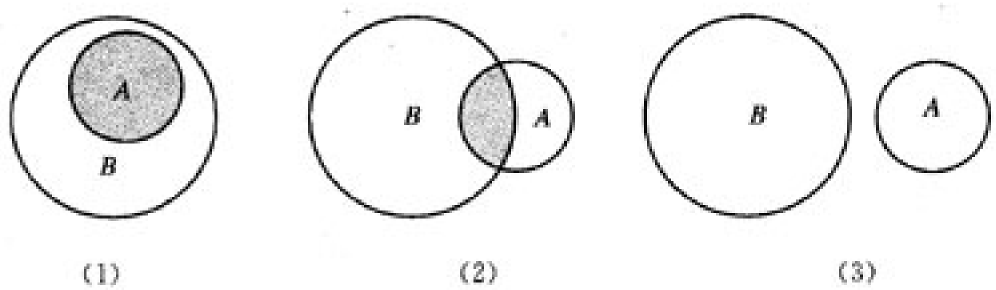


图 1-2

图 1-2(1)表示集合 A 与集合 B 的公共部分就是 A，即 $A\cap B=A$；

图 1-2(2)表示集合 A 与集合 B 的公共部分不是空集，但不是 A，也不是 B，即 $A\cap B\subsetneqq A$，且 $A\cap B\subsetneqq B$；

图 1-2(3)表示集合 A 与集合 B 的公共部分是空集，即 $A\cap B=\varnothing$.

在给出交集记法

$$A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$$

时，建议与并集的记法

$$A\cup B=\{x\mid x\in A，或\ x\in B\}$$

进行比较，使学生认识到“并”“或”与记号“$\cup$”之间的对应关系，以及“交”“且”与记号“$\cap$”之间的对应关系.

（3）集合的补集在介绍了全集这个概念后介绍. 在数学研究中，明确在什么范围内讨论问题是非常重要的，这就是学习全集概念的意义. 教学时可以先让学生在下面的范围内解方程 $(x-2)(x^2-3)=0$：

（1）有理数范围；　　（2）实数范围.

然后问学生，不同的范围对问题的结果有什么影响？这样可以使学生体会到全集的含义. 相对于并集与交集两个概念，补集是较难理解的. 因此，教学时宜多用 Venn 图的直观性帮助学生理解.

3. 例题和习题教学分析.

例 4 可让学生用 Venn 图表示结果，这样做不仅加强了直观性，还可以为后面学习两个集合的交集作准备.

例 5 中的数轴表示是为了直观地表现集合的并运算的过程，所以图 1.1-3 中数轴上 1，2 处用的是空心点.

例 6 可利用教学班级这个实际模型对问题进行改编，也可以让学生阅读后，提出相应的问题.

例7主要目的在于使用集合语言描述几何对象及其间的关系，加深学生对集合间基本关系的理解.

例8可以让学生自己动手完成，还可以要求学生利用Venn图1-3表示A与$\complement_U A$、B与$\complement_U B$.

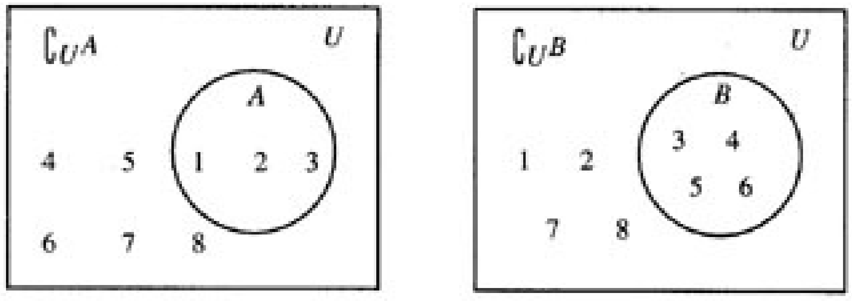


图1-3

在例9中，还可以让学生求$\complement_U A$与$\complement_U B$. 这样，可以使学生更深刻地体会补集的含义.

练习第1、2、3题可结合例6、例7进行，第5题可结合例8进行，第4题是一个开放性的问题，可结合例9进行. 习题1.1 A组中的第1、2、5、6可在课堂选作练习，其余问题可供课后作业选用.

四、教学设计案例

1.1.1 集合的含义与表示（第1课时）

1. 教学任务分析

(1) 了解集合的含义.

①通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的属于关系；

②知道常用数集及其专用记号；

③了解集合中元素的确定性，互异性，无序性；

④会用集合语言表示有关数学对象.

(2) 会用适当的方法表示集合.

能选择自然语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用.

集合作为一种基本的数学语言，学习并掌握它的最好方法是使用. 因此，教学中要多引导学生使用集合语言描述对象，进行自然语言与集合语言间的转换练习.

(3) 培养学生抽象概括的能力.

通过实例抽象概括集合的共同特征，从而引出集合的概念是本节课的重要任务之一. 因此教学时，不仅要关注集合的基本知识的学习，同时还要关注学生抽象概括能力的培养.

2. 教学重点与难点

重点：集合的含义与表示方法.

难点：表示法的恰当选择.

3. 教学基本流程

创设情境，从具体实例引入新课
↓
给出集合含义，明确有关规定
↓
自主学习元素与集合的关系及记号
↓
自主学习常用数集及其记号
↓
自主学习集合的两种表示方法
↓
课堂练习，小结与课后作业

4. 教学情境设计

问　　题	问题设计意图	师　生　活　动
（1）你能举出一些集合的例子吗？	结合学生已有知识经验，启发学生思考，激发学生学习兴趣.	师：引导学生回忆、举例，对学生活动进行评价. 生：回忆，举例，交流.
（2）对于教科书中的 8 个例子，你能概括出它们具有的共同特征吗？	为了解集合的含义做铺垫，培养概括能力.	师：引导学生阅读教科书上的 8 个例子并进行思考，概括； 生：阅读教科书上的 8 个例子，尝试概括 8 个例子的共同特征，并发表自己的意见； 师生共同概括 8 个例子的特征，得出结论.
（3）给出集合的含义.		
（4）你能说说集合中元素的特点吗？	引导学生明确集合元素的确定性、互异性，培养抽象概括能力.	师：引导学生阅读教科书中的相关内容，注意个别辅导，解答学生疑难，并引导学生自己概括集合中元素的特点；让学生自己举出一些能够构成集合的例子以及不能构成集合的例子，并要求说明理由. 生：阅读教科书，思考教师提出的问题，发表自己的看法.
（5）元素与集合的关系应当如何描述？	明确元素与集合的关系.	师：引导学生阅读教科书中的相关内容；可提出类似于“高一（1）班里所有学生组成集合 A，a 是高一（1）班里的同学，b 是高一（2）班的同学，a、b 与 A 分别有什么关系？”的问题引导学生思考. 生：阅读教科书，思考问题，发表自己的看法.
（6）你知道常用数集的记号吗？	使学生回忆数集的扩充过程，认识常用数集的记号.	师：引导学生回忆数集扩充过程，阅读教科书第 3 页表格中的内容. 生：回忆数集扩充过程，阅读教科书，认识常用数集记号，完成教科书第 6 页练习第 1 题，习题 1.1A 组第 1 题.
（7）你能用列举法表示例 1 中的集合吗？	使学生学习用列举法表示集合，并发现集合元素的无序性.	师：先让学生自己尝试用列举法表示集合，再引导学生归纳列举法的特点. 生：阅读教科书，尝试用列举法表示例 1 中的集合，并思考列举法的特点. 完成习题 1.1A 组第 3 题.

续表

问 题	问题设计意图	师 生 活 动
（8）你从教科书第4页的“思考”中想到了什么？	使学生体会用描述法表示集合的必要性，会用描述法表示集合.	师：提出教科书中的思考题，引导学生思考、讨论用列举法表示相应集合的困难，激发学生学习描述法的积极性；引导学生阅读教科书中描述法的相关内容，归纳描述法的特点. 生：思考不能用列举法表示有关集合的理由，与同学讨论交流；阅读教科书，思考描述法的特点，与同学交流阅读教科书的体会，说出自己对描述法特点的认识. 完成例2，讨论应当如何根据问题选择适当的集合表示法. 讨论两种表示法各自的特点，适用对象等.
（9）通过学习，你现在能解决教科书第6页练习与习题1.1中的哪些问题？	反馈学生掌握集合概念的情况，巩固所学知识.	第6页练习第2题，习题1.1A组第2题. 生：独立思考，解决问题. 师：先让学生讲述解答情况，再作出评价，给出正确解答.
（10）小结：为什么要学习集合？选择集合的表示法时应注意些什么？	归纳整理本节课所学知识.	师：引导学生思考，概括. 生：思考，整理，表述概括的结果. 教师应当关注学生是否认识到用集合语言表示有关数学对象的必要性，有关知识是否落实，是否认识了两种表示法的特点.
（11）课后作业 解决下列问题： 习题1.1A组第4题； 结合本节课所学内容，举几个集合实例，比较用自然语言、列举法和描述法表示集合时，各自的特点、适用的对象.		

5. **几点说明**

（1）本节课开始时要注意用学生熟悉的例子引入新课.

（2）教学中应充分关注学生的学习方式的改进，注重让学生阅读教科书，自主学习、思考、交流、讨论、概括.

（3）集合含义比较抽象，教学时应充分结合学生的已有知识经验，通过大量的实例来学习.

（4）本节的符号较多，应注意对各种符号进行对比分析.

（5）用描述法表示集合时，学生容易把集合二字连同元素一起放在花括号内造成错误，如“所有三角形组成的集合”写成｛所有三角形组成的集合｝等，应当注意纠正.

五、习题解答

练习（第6页）

1. (1) $\in$，$\notin$，$\in$，$\notin$；　　(2) $\notin$；
   (3) $\notin$；　　(4) $\in$，$\notin$.
2. (1) $\{-3, 3\}$；　　(2) $\{2, 3, 5, 7\}$；
   (3) $\{(1, 4)\}$；　　(4) $\{x \mid x<2\}$.

练习（第8页）

1. 根据子集的定义，$\{a, b, c\}$的子集必是以其元素 a、b 与 c 中的1个或2个或3个为元素的集合. 又根据子集的性质，空集 $\varnothing$ 也是$\{a, b, c\}$的子集.

所以，集合$\{a, b, c\}$所有子集是 $\varnothing$ ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{b, c\}$，$\{a, c\}$，$\{a, b, c\}$.

2. (1) $\in$；　(2) $\in$；　(3) $=$；
   (4) $\subsetneqq$；　(5) $\subsetneqq$；　(6) $=$.

3. (1) $A\subsetneqq B$；　(2) $B\subsetneqq A$；　(3) $A=B$.

练习（第 12 页）

1. $A\cap B=\{x|x$ 是等腰直角三角形$\}$，
   $A\cup B=\{x|x$ 是等腰三角形或直角三角形$\}$.

2. 因为$A=\{-1, 5\}$，$B=\{-1, 1\}$，所以

$$A\cup B=\{-1, 1, 5\}, A\cap B=\{-1\}.$$

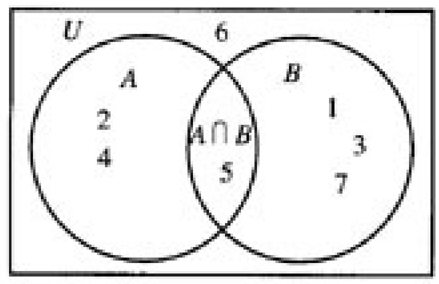
3. 因为集合 A、C 是偶数集，集合 B、D 是奇数集，所以

$$A=C, B=D;$$
$$A\cap B=\varnothing, A\cap D=\varnothing, C\cap B=\varnothing, C\cap D=\varnothing;$$
$$A\cup B=\mathbf{Z}, A\cup D=\mathbf{Z}, C\cup B=\mathbf{Z}, C\cup D=\mathbf{Z}.$$

4. 例如，$A=\{x|x$ 是矩形$\}$，$B=\{x|x$ 是菱形$\}$；
   $A=\{x|x$ 是矩形$\}$，$B=\{x|x$ 是正方形$\}$；
   $A=\{x|x$ 是菱形$\}$，$B=\{x|x$ 是正方形$\}$.

5. 因为 $\complement_U A=\{1, 3, 6, 7\}$，$\complement_U B=\{2, 4, 6\}$，所以

$$A\cap(\complement_U B)=\{2, 4\},$$
$$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{6\}.$$



（第 5 题）

习题 1.1（第 13 页）

A 组

1. (1) $\in$；　(2) $\in$；　(3) $\notin$；
   (4) $\in$；　(5) $\in$；　(6) $\in$.

2. (1) $\in$；　(2) $\notin$；　(3) $\in$.

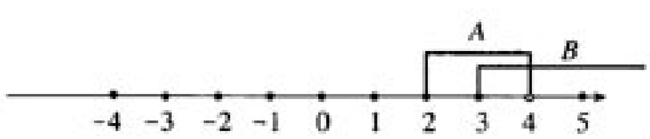
3. (1) $\{2, 3, 4, 5\}$；　(2) $\{1, -2\}$；　(3) $\{0, 1, 2\}$.

4. (1) $\{(0, 0), (1, 1)\}$；　(2) $\{y|y\geqslant -4\}$；
   (3) $\{x \mid x\neq 0\}$；　(4) $\left\{x\middle|x\geqslant\frac{4}{5}\right\}$.

5. (1) $\notin$；$\notin$；$\subsetneqq$；$\subsetneqq$.　(2) $\in$；$\subsetneqq$；$\subsetneqq$；$=$.　(3) $\subsetneqq$；$\supsetneqq$.

6. 对于第一幅图有 $A\subseteq C$，$B\subseteq C$，$A\cap B\neq\varnothing$，符合条件的集合很多，例如，
   $A=\{x|x$ 是矩形$\}$，$B=\{x|x$ 是菱形$\}$，$C=\{x|x$ 是平行四边形$\}$；
   $A=\{x|0<x<5\}$，$B=\{x|x^2-2x=0\}$，$C=\{x|-1<x<20\}$；等等.
   对于第二幅图有 $A\subseteq C$，$B\subseteq C$，$A\cap B=\varnothing$，符合条件的集合很多，例如，
   $A=\{x|x$ 是绿茶$\}$，$B=\{x|x$ 是红茶$\}$，$C=\{x|x$ 是茶$\}$；
   $A=\{x|3<x<10\}$，$B=\{x|x^2-2x=0\}$，$C=\{x|-1<x<20\}$；等等.

7. 由 $3x-7\geqslant 8-2x$ 得 $x\geqslant 3$，即 $B=\{x \mid x\geqslant 3\}$，由下图知



（第 7 题）

$$A\cup B=\{x \mid x\geqslant 2\};$$

$$A\cap B=\{x\mid 3\leqslant x<4\}.$$

8. 因为 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，所以

$$A\cap B=\{1,2,3\},$$
$$A\cap C=\{3,4,5,6\};$$

又因为 $B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B\cap C=\{3\}$，所以

$$A\cap(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,\},$$
$$A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

9. 用集合语言表示"学校规定，每位参赛同学最多只能参加两项比赛"即为

$$(A\cap B)\cap C=\varnothing.$$

(1) $A\cup B=\{x\mid x$ 是参加百米跑或参加二百米跑的同学$\}$；

(2) $A\cap C=\{x\mid x$ 是既参加百米跑又参加四百米跑的同学$\}$.

10. (1) 当 $a=3$ 时，$A=\{3\}$，又因为 $B=\{1,4\}$，所以

$$A\cup B=\{1,3,4\},\ A\cap B=\varnothing;$$

(2) 当 $a=1$ 时，$A=\{3,1\}$，所以

$$A\cup B=\{1,3,4\},\ A\cap B=\{1\};$$

(3) 当 $a=4$ 时，$A=\{3,4\}$，所以

$$A\cup B=\{1,3,4\},\ A\cap B=\{4\};$$

(4) 当 $a\neq 1$、3、4 时，$A=\{3,a\}$，所以

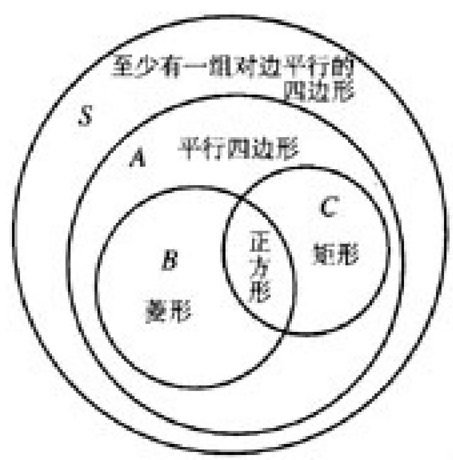
$$A\cup B=\{1,3,4,a\},\ A\cap B=\varnothing.$$

11. 依题意画出右图，由图可知

$B\cap C=\{x\mid x$ 是正方形$\}$；

$\complement_A B=\{x\mid x$ 是邻边不相等的平行四边形$\}$；

$\complement_S A=\{x\mid x$ 是仅有一组对边平行的四边形$\}=\{x\mid x$ 是梯形$\}$.



(第 11 题)

12. 因为 $A\cup B=\{x\mid 2<x<10\}$，所以

$$\complement_R(A\cup B)=\{x\mid x\leqslant 2 \text{ 或 } x\geqslant 10\};$$

因为 $A\cap B=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$，所以

$$\complement_R(A\cap B)=\{x\mid x<3 \text{ 或 } x\geqslant 7\};$$

因为 $\complement_R A=\{x\mid x\geqslant 7 \text{ 或 } x<3\}$，所以

$$(\complement_R A)\cap B=\{x\mid 2<x<3 \text{ 或 } 7\leqslant x<10\};$$

因为 $\complement_R B=\{x\mid x\geqslant 10 \text{ 或 } x\leqslant 2\}$，所以

$$A\cup(\complement_R B)=\{x\mid x\leqslant 2 \text{ 或 } 3\leqslant x<7 \text{ 或 } x\geqslant 10\}.$$

B 组

1. 因为 $B\subseteq A\cup B=\{1,2\}=A$，所以集合 B 是集合 A 的子集，而集合 A 的子集有 $\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{1,2\}$，故这样的集合 B 有 4 个.

2. 集合 D 表示直线 $2x-y=1$ 和直线 $x+4y=5$ 的交点. 这两条直线的交点 $(1,1)$ 在直线 $y=x$ 上，即 $D\subsetneqq C$.

3. 先在数轴上表示集合 A，然后化简集合 B，由集合元素的互异性可知，此时应考虑 a 的取值是否为 1，要使集合 B 成为集合 A 的子集，集合 B 的元素在数轴上的对应点必须在集合 A 对应的线段上，从而确定字母 a 的分类标准.

(1) 当 $a=1$ 时，$B=\{1\}$，所以 B 是 A 的子集；

(2) 当 $1<a\leqslant 3$ 时，B 也是 A 的子集；

(3) 当 $a<1$ 或 $a>3$ 时，B 不是 A 的子集.

综上可知，当 $1\leqslant a\leqslant 3$ 时，B 是 A 的子集.

由于集合 B 最多只有两个元素，而集合 A 有无数个元素，故不存在实数 a，使 $B=A$.

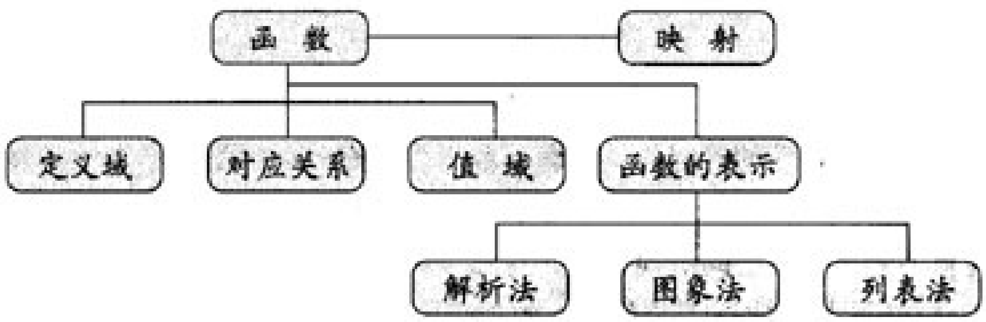
4. 因为 $U=A\cup B=\{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1，3，5，7\}$，所以

$$1，3，5，7\in \complement_U B，$$

$$B=\complement_U(\complement_U B)=\{0，2，4，6，8，9，10\}.$$

1.2 函数及其表示

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节教学的重点是使学生在已有认识（把函数看成变量之间的依赖关系）的基础上，学会用集合与对应的语言刻画函数概念，认识到函数是描述客观世界中变量间依赖关系的重要数学模型.

学生在本节学习中可能会遇到以下困难：

1. 不容易认识到函数概念的整体性，而将函数单一地理解成函数中的对应关系，甚至认为函数就是函数值. 要帮助学生解决这一问题，可以列举一些对应关系相同但定义域不同的函数，或定义域、值域相同但对应关系不同的函数让学生在比较、判断中进行体会，如 1.2.1 小节中的例 2.

2. 函数符号 $y=f(x)$ 是学生难以理解的抽象符号之一，它的内涵是"对于定义域中的任意 x，在对应关系 f 的作用下即可得到 y". 在有些问题中，对应关系 f 可用一个解析式表示，但在不少问题中，对应关系 f 不便用或不能用解析式表示，这时，就必须采用其他方式，如图象或表格等，这些是学生不容易理解的. 在教学中，可以让学生通过分析实际问题和动手操作逐渐明白函数符号的内涵. 例如，将不同问题情境中的对应关系用统一的符号表示，计算当自变量是数字、字母不同情况时的函数值等等.

三、编写意图与教学建议

函数是高中数学的重要内容. 在学生学习用集合与对应的语言刻画函数之前，学生已经会把函数看成变量之间的依赖关系；同时，虽然函数概念比较抽象，但函数现象大量存在于学生周围. 因此，

教科书采用了从实际例子中抽象概括出用集合与对应的语言定义函数的方式介绍函数概念. 这样不仅为学生理解函数概念打了感性基础，而且注重培养学生的抽象概括能力，启发学生运用函数模型表述、思考和解决现实世界中蕴涵的规律，逐渐形成善于提出问题的习惯，学会数学表达和交流，发展数学应用意识.

函数的表示是本节的主要内容之一. 学生在学习用集合与对应的语言刻画函数之前，比较习惯的是用解析式表示函数，但这是对函数很不全面的认识. 在本节中，教科书从引进函数概念开始就比较注重函数的不同表示方法：解析法，图象法，列表法. 函数的不同表示方法能丰富对函数的认识，帮助理解抽象的函数概念. 特别是在信息技术环境下，可以使函数在数与形两方面的结合得到更充分的表现，使学生通过函数的学习更好地体会数形结合这种重要的数学思想方法. 因此，在研究函数时，要充分发挥图象直观的作用；在研究图象时，又要注意代数刻画以求思考和表述的精确性.

本教科书将映射作为函数的一种推广，这与传统的处理方式有了逻辑顺序上的变化. 这样处理，主要是想较好地衔接初中的学习，并让学生将更多的精力集中于理解函数的概念，同时，也体现了特殊到一般的思维过程.

1.2.1 函数的概念

1. 函数概念引入方式的说明.

函数概念的引入一般有两种方法，一种方法是先学习映射，再学习函数；另一种方法是通过具体实例，体会数集之间的一种特殊的对应关系，即函数. 为了充分运用学生已有的认知基础，为了给抽象概念以足够的实例背景，以有助于学生理解函数概念的本质，教科书采用了后一种方式，即从三个背景实例入手，在体会两个变量之间依赖关系的基础上，引导学生运用集合与对应的语言刻画函数概念. 继而，通过例题，“思考”“探究”“练习”中的问题从三个层次理解函数概念：函数定义、函数符号、函数三要素，并与初中定义作比较.

在学习用集合与对应的语言刻画函数之前，可以让学生先复习初中学习过的函数概念，比如利用信息技术安排如下的教学情境：

用计算器或计算机画出 $h=130t-5t^2$ 的图象（图 1-4），在 $h=130t-5t^2$ 的图象上任取一点 P，测出点 P 的坐标(t,h)，然后拖动点 P 的位置，观察点 P 的横坐标 t 与纵坐标 h 的变化规律.

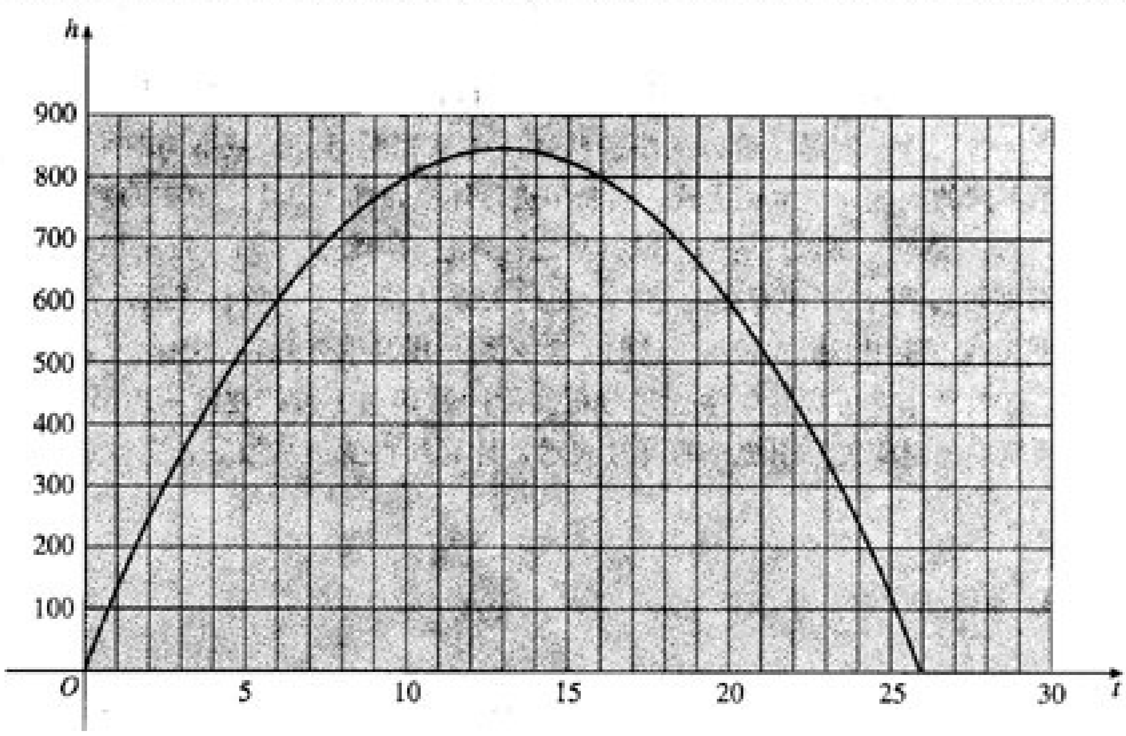


图 1-4

通过以上活动，使学生看到函数描述了变量之间的依赖关系．在图1-4中，随着点P位置的改变，点P的横坐标t与纵坐标h都在变化，但无论点P在哪个位置，点P的横坐标t总对应唯一的纵坐标h．由此，使学生体会到，函数中的函数值h的变化总是依赖于自变量t的变化，而且由t的值唯一确定．

2. 分析，概括背景实例.

（1）选自运动、自然界、经济生活中用三种不同方法表示的函数，既可以让学生感受函数在许多方面的广泛应用，又可以使学生意识到对应关系不仅仅可以是明确的解析式（实例1），也可以是形象直观的曲线（实例2）或表格（实例3）．

（2）为学生创设问题情境．对于实例（1）(2)，教科书详细地用集合与对应的语言进行了描述；对于实例（3），提出了一个要求，目的在于期望通过一定的引导，学生可以自己尝试用集合与对应的语言进行描述，进而为回答下面“思考”中的问题作准备．

（3）这三个函数的自变量的取值范围都是有限制的．事实上，大多数现实世界中的函数问题和今后研究的函数的自变量的取值范围都是有限制的，可以通过学生的活动让他们认识到这一点．例如，让学生亲自给定问题(1)中炮弹发射时间t的一些值，根据解析式$h=130t-5t^2$计算对应的炮弹高度h的值．

（4）在三个例子的教学中，重点在于引导学生体会函数概念中的对应关系．如有的学生学习问题(2)时可能会提出问题“按照图中曲线，对于数集B中的每一个S，有几个t和它对应，应该怎么解释呢”，虽然是同一条曲线，但对应方向不同，涉及的对应关系也不同，像这种从B到A的对应就不是函数．

（5）三个例子中涉及到的其他学科的知识，可以简要地介绍些相关知识，如恩格尔系数，以使学生了解我国的经济发展情况，增加民族自豪感．

（6）学习完每一个背景实例后，可以让学生讨论它们的共性：

① 都涉及两个数集；

② 两个数集间都有一种确定的对应关系，即对于每一个x，都有唯一确定的y和它对应．

运用集合与对应的语言，采用统一的符号，就得到函数的一般概念：

设A、B是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个数x，在集合B中都有唯一确定的数$f(x)$和它对应，那么就称$f: A\to B$为从集合A到集合B的一个**函数**(function)，记作

$$y=f(x),\ x\in A.$$

其中，x叫做自变量，x的取值范围A叫做函数的**定义域**；与x的值相对应的y值叫做函数值，函数值的集合$\{f(x)\mid x\in A\}$叫做函数的**值域**．

3. 函数概念的理解.

（1）对于函数概念，应使学生明确以下两点：

①定义域、值域和对应关系是决定函数的三要素，这是一个整体．

②函数记号$y=f(x)$的内涵．同时也应用具体的函数说明符号“$y=f(x)$”为“y是x的函数”这句话的数学表示，它仅仅是函数符号，不是表示“y等于f与x的乘积”；符号$f(a)$与$f(x)$既有区别又有联系，$f(a)$表示当自变量$x=a$时函数$f(x)$的值，是一个常量，而$f(x)$是自变量x的函数．在一般情况下，它是一个变量，$f(a)$是$f(x)$的一个特殊值．

（2）教科书在给出函数的定义后，安排了用函数的定义去解释学过的一次函数、二次函数、反比

例函数．对于这部分，可以设计如下表格让学生填写．

函　数	一次函数	二次函数		反比例函数
		$a>0$	$a<0$	
对应关系				
定义域				
值　域				

同时，可以利用信息技术工具画出函数的图象帮助理解上述函数的三个要素．

在函数概念教学中，应强调对函数概念本质的理解，避免在求函数定义域、值域及讨论函数性质时出现过于繁琐的技巧训练，避免人为地编制一些求定义域和值域的偏题．

（3）区间概念的教学要使学生明确以下几点：

①区间是集合；

②区间的左端点必小于右端点；

③区间中的元素都是点，可以用数字表示；

④任何区间均可在数轴上表示出来；

⑤以“$-\infty$”或“$+\infty$”为区间的一端时，这一端必须是小括号．

虽然这段内容记号多，但并不难理解，所以可以先让学生自己阅读，然后进行不等式、区间与数轴表示的互相转化，以此熟悉区间的概念．教师可以把教科书上与区间对应的表格进行变化．例如，让学生阅读后填写下表：

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x \mid a\leqslant x<b\}$	半开半闭区间	$[a,b)$	
$\{x \mid a<x\leqslant b\}$	半开半闭	$(a,b]$	
$\{x \mid x\geqslant a\}$			
$\{x \mid x>a\}$			
$\{x \mid x<b\}$			
$\{x \mid x\leqslant b\}$			

4. 例题和习题教学分析．

例1的教学任务：

（1）学会求简单函数的定义域．在中学阶段，所研究的函数通常是能够用解析式表示的．如果未加特别说明，函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数的集合．在实际问题中，还必须考虑自变量的允许范围．

（2）对用解析式表示的函数，会由给定的自变量与函数的解析式计算函数值．

（3）进一步体会函数记号的含义，能区别 $f(-3)$、$f(a)$、$f(x)$．

例 2 的教学任务：

（1）通过判断函数的相等认识到函数的整体性．值得注意的是，在三个要素中，由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以只要两个函数的定义域和对应关系完全一致，这两个函数就相等．

（2）进一步加深学生对函数概念的理解．

本小节的练习，可以这样处理：第 1 题、第 3 题结合例 1 进行，第 3 题应该让学生体会到从特殊到一般的思想方法，同时为后面研究函数的性质（奇函数）作准备；第 2 题结合例 2 进行，加深对函数相等的理解，教学时还可让学生举一些函数相等的具体例子．

5. 比较初中的函数定义，提升对函数的认识．

本小节最后的"思考"，目的是让学生通过对初中、高中分别出现的函数定义进行比较，理解引入新定义的必要性，提升对函数的认识．

这两种定义在实质上是一致的，即它们的定义域与值域的意义完全相同，对应关系本质上也一样，只不过叙述的出发点不同．初中给出的定义是从运动变化的观点出发，其中的对应关系是将自变量 x 的每一取值与唯一确定的函数值 y 对应起来；高中给出的定义是从集合、对应的观点出发，其中的对应关系是将原象集合中的任一元素与象集合中的唯一确定的元素对应起来．从历史上看，初中给出的定义来源于物理公式，最初的函数概念几乎等同于解析式．后来，人们逐渐意识到定义域与值域的重要性，而要说清楚变量以及两个变量间变化的依赖关系，往往先要弄清各个变量的物理意义，这就使研究受到了不必要的限制．如果只根据变量观点，有些函数就很难进行深入研究．例如

$$f(x)=\begin{cases}1，当 x 是有理数时，\\0，当 x 是无理数时．\end{cases}$$

对这个函数，如果用变量观点来解释，会显得十分勉强，也说不出 x 的物理意义是什么．但用集合与对应的观点来解释，就十分自然．从这个意义上来说，高中给出的定义更具一般性．实际上，初中给出的定义，已经渗透了集合与对应的观点，因为其中有"按照某个对应关系，y 都有唯一确定的值和它对应"．由于用变量观点描述函数比较生动、直观，所以现在仍然广泛使用着初中给出的定义，今后，为了方便，我们有时也仍然使用它．

教学时，可以组织学生小组讨论、交流获得的认识．

1.2.2　函数的表示法

学习函数的表示，不仅是研究函数本身和应用函数解决实际问题所必须涉及的问题，而且是加深理解函数概念的过程．同时，基于高中阶段所接触的许多函数均可用几种不同的方式表示，因而使得学习函数的表示也是向学生渗透数形结合方法的重要过程．

1. 函数的表示法教学分析．

（1）初中已经接触过函数的三种表示法：解析法、列表法和图象法．高中阶段是让学生在了解三种表示法各自优点的基础上，重点在于使学生面对实际情境时，会根据不同的需要选择恰当的方法（图象法、列表法、解析法）表示函数．

解析法有两个优点：一是简明、全面地概括了变量间的关系；二是可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值．中学阶段所研究的主要是能够用解析式表示的函数．

图象法的优点是直观形象地表示自变量的变化，相应的函数值变化的趋势，有利于我们通过图象来研究函数的某些性质．图象法在生产和生活中有许多应用，如企业生产图，股市走势图等．

列表法的优点是不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值，表格法在实际生产和

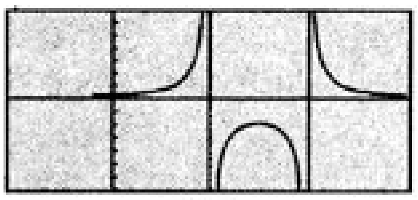
生活中也有广泛应用．如银行利率表、列车时刻表等．

（2）可充分利用信息技术，为学生创设丰富的数形结合环境，帮助学生更深刻地理解函数概念及其表示法．例如，可补充如下函数，让学生用计算器或计算机画出它们的图象（图 1-5）：

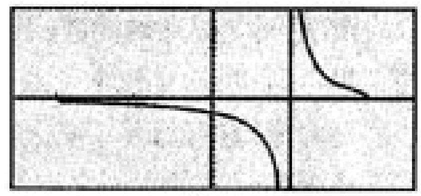
①$y=\dfrac{3}{x^2-3x+2}$；　　②$y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-2x}$；

③$y=\sqrt{x^2-9}$；　　④$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$．

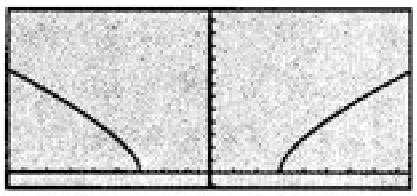
上述四个函数的图象依次为：



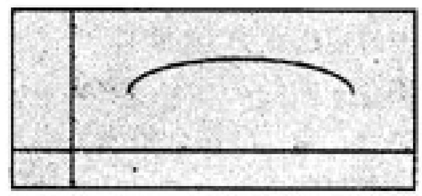
①



②



③



④

图 1-5

2. 映射教学分析．

本小节最后一部分内容是在函数的基础上介绍映射的概念．教科书把映射作为函数的推广来处理，能很好体现从特殊到一般的认知规律，这与以前的高中教科书是不同的．教学时应该注意以下几点：

（1）函数推广为映射，只是把函数中的两个数集推广为两个任意的集合；

（2）对于映射 f：$A\to B$，我们通常把集合 A 中的元素叫原象，而把集合 B 中与 A 中的元素相对应的元素叫象．所以，集合 A 叫原象集，集合 B 叫象所在的集合（集合 B 中可以有些元素不是象）．

（3）映射只要求“对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应”，即对于 A 中的每一个原象在 B 中都有象，至于 B 中的元素在 A 中是否有原象，以及有原象时原象是否唯一等问题是不需要考虑的．

在实际教学时宜多举学生身边的实际例子帮助理解，例如：

全班同学组成集合 A，全班同学的学号组成集合 B，对应关系 f 是“每一个同学对应自己的学号”，这样 f：$A\to B$ 是一个映射．

（4）用映射刻划函数的定义可以这样叙述：设 A，B 都是非空的数集，那么 A 到 B 的映射 f：$A\to B$就叫做A 到 B 的函数，记作

$$y=f(x).$$

其中 $x\in A$，$y\in B$．原象集合 A 叫做函数 $y=f(x)$的定义域，象集合 C 叫做函数 $y=f(x)$的值域．很明显，$C\subseteq B$．

由于映射在近代数学中是一个极其重要且应用广泛的概念，所以了解一下函数与映射的上述关系是有好处的，可以为今后进一步学习各类映射作好准备．但不必引申更多的内容．

3. 例题和习题教学分析．

例 3 介绍了一个可以用三种表示方法来表示的函数．通过这个例子可以达到以下目的：

(1) 让学生体会到三种表示方法各自的优点. 并且，例 3 后面的"思考"为学生比较三种表示方法提供了机会，教学时教师应注意不要让学生错过这个机会. 对于"所有的函数是否都能用解析法表示"，学生比较难以回答，教学时不妨先举一些例子启发学生，然后再由学生试着举一些例子.

(2) 使学生看到函数的图象可以是一些离散的点，这与学生以前接触到的一次函数、二次函数的图象是连续的曲线有很大的差别，教学时要考虑到学生的认知基础，强调 $y=5x$ ($x\in R$)是连续的直线，但 $y=5x$ ($x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$)却是 5 个离散的点，由此又让学生看到，函数概念中，对应关系、定义域、值域是一个整体.

函数图象既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等. 例 3 边框中的问题"判断一个图形是不是函数图象的依据是什么?"，应在组织学生讨论后获得结论"平行于 y 轴的直线（或 y 轴）与图形至多一个交点".

例 4 利用表格给出了四个函数，它们分别表示王伟、张城、赵磊的各次考试成绩及各次考试的班级平均分. 由表格区分三位同学的成绩高低不直观，所以教科书选择了图象法表示. 教学时要培养学生根据实际需要选择恰当的函数表示法的能力. 要注意的是，图中的虚线不是函数图象的组成部分，之所以用虚线连接散点，主要是为了区分这三个函数，并且让三个函数的图象具有整体性，以方便比较. 教学时应引导学生观察图象，学习如何从图象上获取有用信息，为分析每位同学的学习情况提供依据.

例 5 的主要目的有两个：一是让学生进一步体会数形结合在理解函数中的重要作用，二是为介绍分段函数作准备.

例 6 的主要目的有以下几点：

(1) 让学生尝试用数学表达式去表达实际问题；

(2) 学习分段函数及其表示；

(3) 注意在数学模型中全面反映问题的实际意义；

(4) 让学生根据这个例题的边框要求，自行设计任意两站之间的票价表以方便售票员与乘客，体会在不同情境中使用恰当的函数表示法.

由于分段函数学生比较难学，但它又是一类重要的函数，因此教科书专门作了介绍. 教学中不必要求学生一次完成认识，可以根据学生的具体情况，采取不同要求.

例 7 中的(1)(2)是以后经常用到的映射，教学时应引导学生认真理解. 对于(3)，还可以把"内切圆"换为"外接圆"让学生思考. 对于(4)，可以与例 7 后的"思考"进行比较，让学生进一步体会映射是讲顺序的，即 f: $A\to B$ 与 f: $B\to A$ 是不同的，并且，它们中可以一个是映射而另一个不是映射，也可以两个都是映射或两个都不是映射.

本小节的练习中，第 1 题是例题的补充，它的图象是学生常见的连续曲线. 第 2 题可以培养学生的读图能力，并加深对函数意义的理解. 第 3 题的用意是让学生接触各种形式的对应关系，以了解映射概念.

四、教学设计案例

函数的概念（第 1 课时）

1. 教学任务分析

(1) 正确理解函数的概念.

通过丰富实例，使学生建立起函数概念的背景，体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学

模型．能用集合与对应的语言来刻画函数，了解构成函数的三个要素．

（2）通过从实际问题中抽象概括函数概念的活动，培养学生的抽象概括能力．

在丰富的实例中，通过对关键词的强调和引导，使学生发现、概括出它们的共同特征，在此基础上再用集合与对应的语言来刻画函数，体会对应关系在刻画函数概念中的作用．

2．教学重点与难点

重点：体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型，正确理解函数的概念．

难点：函数概念及符号 $y=f(x)$ 的理解．

3．教学基本流程

分析实例1、2、3

↓

引入函数的定义

↓

利用函数定义解释已学函数

↓

了解函数的三要素

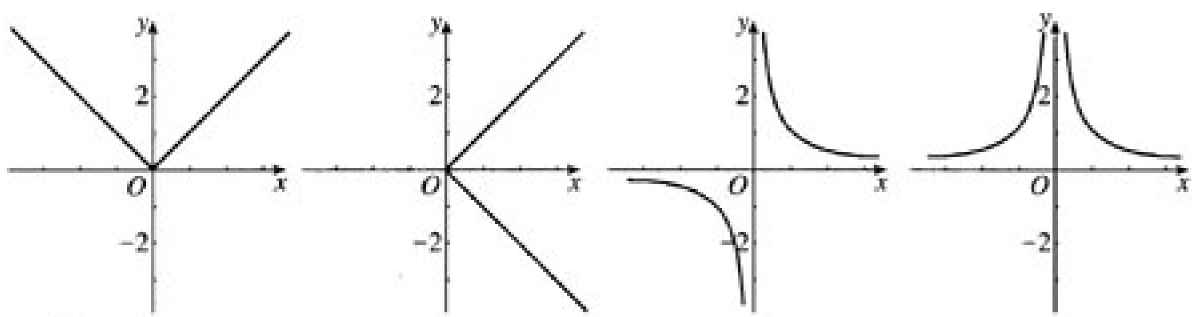
↓

列举函数例子，加深概念理解

4．教学情境设计

问　　题	问题设计意图	师　生　活　动
（1）对教科书中的实例1，你能得出炮弹飞行1 s、5 s、10 s、20 s时距地面多高吗？其中，t 的变化范围是多少？	体会用解析式刻画变量之间的对应关系，关注 t 和 h 的范围．	师：启发学生用集合与对应的语言描述变量之间的依赖关系：在 t 的变化范围内，任给一个 t，按照给定的解析式，都有唯一的一个高度 h 与之相对应． 生：用计算器计算然后用集合与对应的语言描述变量之间的依赖关系．
（2）对教科书中的实例2，你能从图中可以看出哪一年臭氧空洞面积最大？哪些年的臭氧空洞面积大约为1 500万平方千米？其中 t 的取值范围是什么？	体会用图象刻画变量之间的对应关系，关注 t 和 S 的范围．	师：引导学生看图，并启发：在 t 的变化范围内，任给一个 t，按照给定的图象，都有唯一的一个臭氧空洞面积 S 与之相对应． 生：动手测量然后用集合与对应的语言描述变量之间的依赖关系．
（3）在教科书的实例3中，恩格尔系数与时间之间的关系是否和前两个实例中的两个变量之间的关系相似？如何用集合与对应的语言来描述这个关系？	体会用表格刻画变量之间的对应关系．	师生：共同读表然后用集合与对应的语言描述变量之间的依赖关系．
（4）以上三个实例的共同特点是什么？	概括出函数的定义．	生：分组讨论三个实例的共同特点，然后归纳出函数定义在全班交流． 师生：概括出函数的定义，指出解析式、图象、表格都是一种对应关系．

续表

问　　题	问题设计意图	师　生　活　动
（5）概括出函数的定义.		
（6）初中学过哪些函数？它们的定义域，值域，对应法则分别是什么？	使得对函数的描述性定义上升到集合与对应语言刻画的定义，加深对函数概念的理解.	生：通过三个已知的函数： $y=ax+b\ (a\neq0)$， $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$， $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq0)$. 比较描述性定义和集合与对应语言刻画的定义，谈谈体会. 师：归纳总结.
（7）补充练习：下列图象中不能作为函数 $y=f(x)$ 的图象的是（　）.  (A)　(B)　(C)　(D)		
（8）你对“函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型”这句话有什么体会？构成函数的要素有哪些？你能举出生活中一些函数的例子吗？	启发学生对本节课学习的内容进行总结，提醒学生重视研究问题的方法和过程，学生通过对这些问题的回答，初步理解函数的一般概念.	生：讨论、交流. 师：对学生的叙述进行评价、归纳. 师生：从不同的具体实例中发现函数并概括出函数的定义；通过比较加深对函数概念的理解.
（9）作业：举出生活中函数的例子（三个以上），并用集合与对应的语言来描述函数，同时说出函数的定义域、值域和对应关系.		

5. 几点说明

本节课可以在以下两个方面使用信息技术手段：

（1）计算实例 1 中炮弹飞行的高度；

（2）画出初中学过的三种函数的动态图象，以方便学生观察.

五、习题解答

练习（第 22 页）

1.（1）因为 $4x+7\neq0$，得 $x\neq-\dfrac{7}{4}$，所以，函数 $f(x)=\dfrac{1}{4x+7}$ 的定义域为 $\left\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq-\dfrac{7}{4}\right\}$.

（2）因为 $1-x\geqslant0$ 且 $x+3\geqslant0$，得 $-3\leqslant x\leqslant1$，所以，函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}-1$ 的定义域为

$\{x\in\mathbf{R}\mid -3\leqslant x\leqslant 1\}$.

2.（1）不相等．因为前者的定义域为$\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 100\}$，而后者的定义域为$\mathbf{R}$.

（2）不相等．因为前者的定义域为$\mathbf{R}$，而后者的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$.

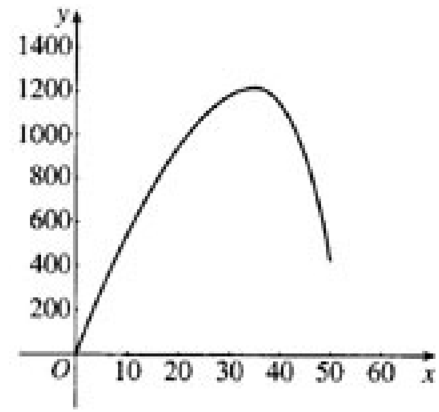
3.（1）$f(2)=28$，$f(-2)=-28$，$f(2)+f(-2)=0$.

（2）$f(a)=3a^3+2a$，$f(-a)=-(3a^3+2a)$，$f(a)+f(-a)=0$.

（3）$f(x)+f(-x)=0$.

练习（第27页）

1. $y=x\sqrt{2\,500-x^2}$ $(0<x<50)$，图象如右所示.

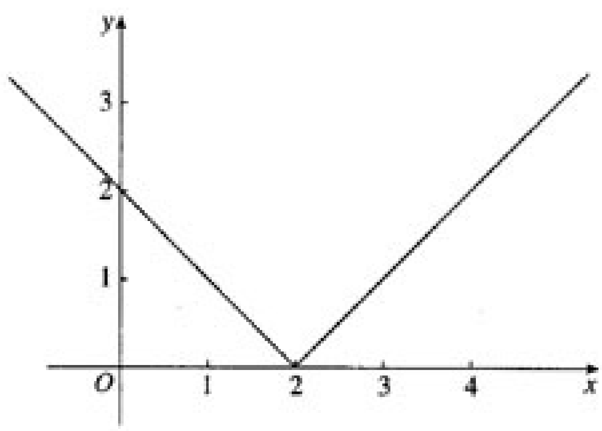


（第1题）

2.（1）题与D图，（2）题与A图，（3）题与B图吻合得最好．剩下与C图相符的一件事可能为：

我出发后感到时间较紧，所以加速前进，后来发现时间还很充裕，于是放慢了速度.

3.



（第3题）

4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$；$45°$.

习题1.2（第28页）

A组

1.（1）由$x-4\neq 0$，得$x\neq 4$，所以$f(x)=\frac{3x}{x-4}$的定义域是$\{x\mid x\neq 4\}$.

（2）因为对于$x\in\mathbf{R}$的任何一个值，$f(x)=\sqrt{x^2}$都有意义，所以$f(x)=\sqrt{x^2}$的定义域是$\mathbf{R}$.

（3）因为由$x^2-3x+2\neq 0$，得$x\neq 1$且$x\neq 2$，所以$f(x)=\frac{6}{x^2-3x+2}$的定义域为$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 1$，且$x\neq 2\}$.

（4）因为由$\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 得$x\leqslant 4$，且$x\neq 1$，所以，$f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$的定义域是$\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant 4$且$x\neq 1\}$.

2. 第(3)组中的函数$f(x)$与$g(x)$相等．第(1)、(2)组中的两个函数的定义域不同.

3.（1）$y=3x$的定义域为$\mathbf{R}$，值域为$\mathbf{R}$.

（2）$y=\frac{8}{x}$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$，值域为$\{y\mid y\neq 0\}$.

（3）$y=-4x+5$的定义域为$\mathbf{R}$，值域为$\mathbf{R}$.

（4）$y=x^2-6x+7$的定义域为$\mathbf{R}$，值域为$\{y\mid y\geqslant -2\}$.

图略.

4. $f(-\sqrt{2})=8+5\sqrt{2}$;

$f(-a)=3a^2+5a+2$;

$f(a+3)=3a^2+13a+14$;

$f(a)+f(3)=3a^2-5a+16$.

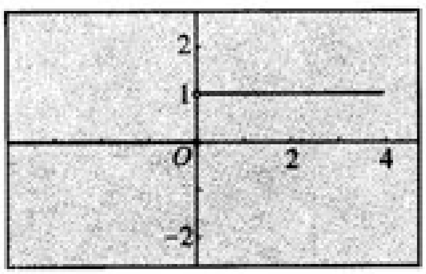
5. (1) 因为$\frac{3+2}{3-6}=-\frac{5}{3}\neq 14$，所以点$(3, 14)$不在函数 $f(x)$的图象上;

(2) -3;

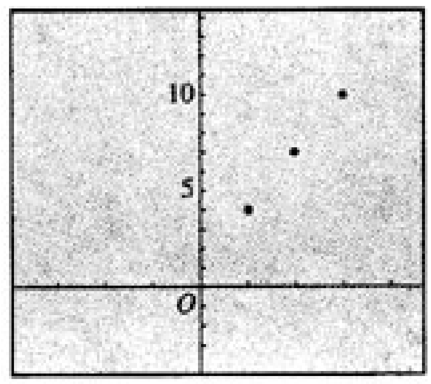
(3) 由$\frac{x+2}{x-6}=2$ 解得 $x=14$.

6. 因为 $f(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$，所以 $f(-1)=8$.

7.



(1)



(2)

(第 7 题)

8. 例如，$y=\frac{10}{x}$ $(x>0)$，$l=2x+\frac{20}{x}$ $(x>0)$，$l=2\sqrt{d^2+20}$.

9. 依题意得 $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 x=vt$，所以 $x=\frac{4v}{\pi d^2}t$.

据题意可知函数的值域是$[0, h]$，所以函数的定义域为$\left[0, \frac{h\pi d^2}{4v}\right]$.

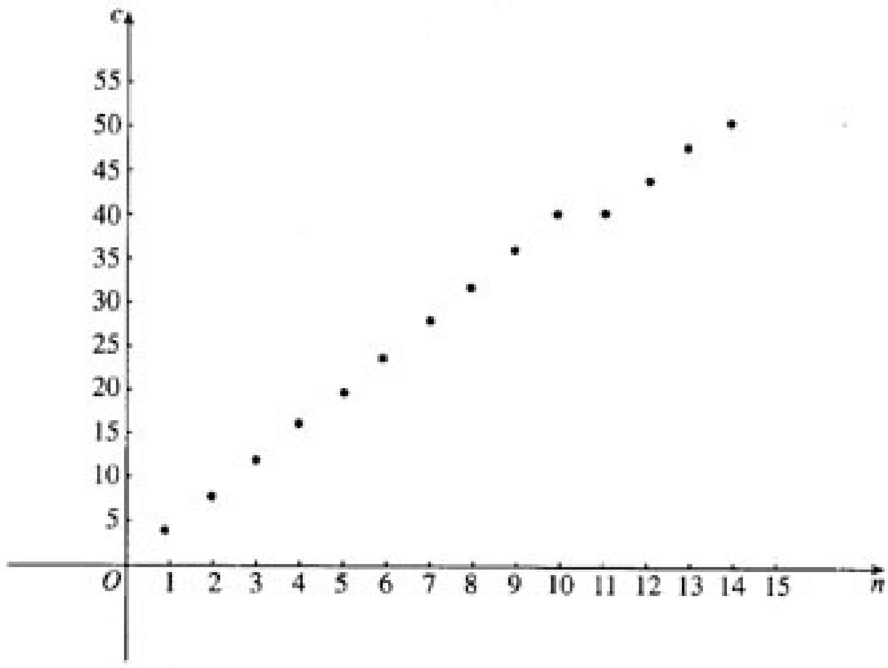
10. (1)

洗衣次数 n	5	9	10	11	15
洗衣费用 c	20	36	40	40	56

(2) 费用 c 是次数 n 的函数，因为对于次数集合中的每一个元素（次数），在费用集合中都有唯一的元素（费用）和它对应. 但对于费用集合中的每一个元素（费用），在次数集合中并不都是只有唯一的一个元素和它对应. 如 40 元就有 10 次和 11 次和它对应.

$$c=\begin{cases}4n, & n\leqslant 10, \text{且 } n\in \mathbf{N}^*, \\ 4(n-1), & n\geqslant 11, \text{且 } n\in \mathbf{N}^*.\end{cases}$$

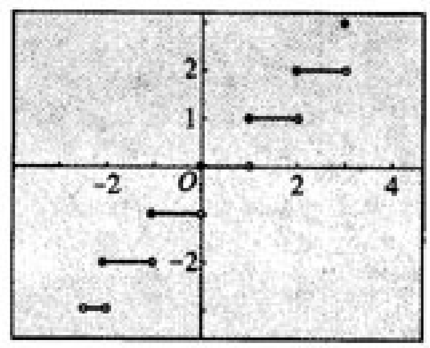
(3) 其图象如下:



（第10题）

11. $f(x)=\begin{cases}-3, & -2.5<x<-2,\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ 3, & x=3.\end{cases}$

函数图象如右.

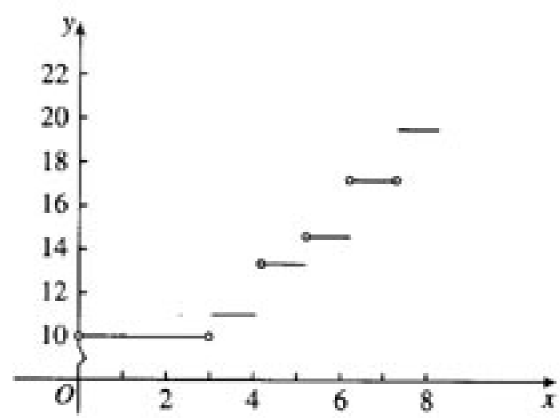


（第11题）

12. $y=\begin{cases}10, & 0<x<3,\\ 11.6, & x=3,\\ 1.6(x-3)+10, & 3<x<7,\ x\in \mathbf{Z},\\ 1.6([x+1]-3)+10, & 3<x<7,\ x\notin \mathbf{Z},\\ 17.2, & x=7,\\ 2.4(x-7)+14.8, & x>7,\ x\in \mathbf{Z},\\ 2.4([x+1]-7)+14.8, & x>7,\ x\notin \mathbf{Z}.\end{cases}$

说明 在教学中可对本题自变量的取值范围加以限制，如写出行驶里程在 8 km 内的函数解析式.

函数部分图象如右.



（第12题）

13. 过水池的中心任意选取一个截面. 由物理学知识可知，喷出的水柱轨迹是抛物线. 建立如图所示的直角坐标系，由已知条件易知，水柱上任意一点距中心的水平距离 x m 与此点的高度 y m 之间的函数关系是

$$y=\begin{cases}a_1(x+4)^2+6, & -10\leqslant x<0,\\ a_2(x-4)^2+6, & 0\leqslant x\leqslant 10.\end{cases}$$

由 $x=-10$，$y=0$，得 $a_1=-\dfrac{1}{6}$；由 $x=10$，$y=0$，得 $a_2=-\dfrac{1}{6}$. 于是，所求函数解析式为

$$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}(x+4)^2+6, & -10\leqslant x<0,\\ -\dfrac{1}{6}(x-4)^2+6, & 0\leqslant x\leqslant 10.\end{cases}$$

当 $x=0$ 时，$y=\dfrac{10}{3}$.

所以装饰物的高度为 $\dfrac{10}{3}$ m.

14. 设 f 为集合 A 到集合 B 的映射，则从 A 到 B 的映射共有 8 种，分别为：

(1) $\begin{cases}f(a)=0\\f(b)=0\\f(c)=0\end{cases}$　(2) $\begin{cases}f(a)=0\\f(b)=0\\f(c)=1\end{cases}$　(3) $\begin{cases}f(a)=0\\f(b)=1\\f(c)=0\end{cases}$　(4) $\begin{cases}f(a)=1\\f(b)=0\\f(c)=0\end{cases}$

(5) $\begin{cases}f(a)=1\\f(b)=1\\f(c)=0\end{cases}$　(6) $\begin{cases}f(a)=1\\f(b)=0\\f(c)=1\end{cases}$　(7) $\begin{cases}f(a)=0\\f(b)=1\\f(c)=1\end{cases}$　(8) $\begin{cases}f(a)=1\\f(b)=1\\f(c)=1\end{cases}$

B组

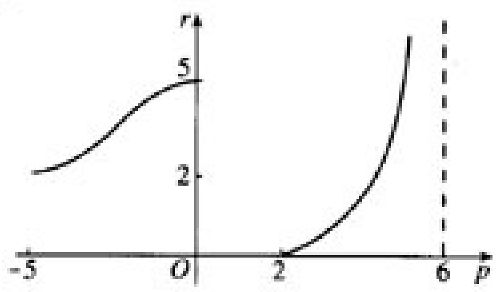
1. (1) $\{x\mid x\neq\pm 1\}$；　(2) $\{x\mid x\geqslant -4，且 x\neq -2\}$；

(3) $\mathbf{R}$；　(4) $\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{1}{3}\right\}$.

2. (1) $\{p\mid -5<p<0 或 2<p<6\}$；

(2) $[0,+\infty)$；

(3) r 在 $\{r\mid 0\leqslant r<2 或 r\geqslant 5\}$ 上取值时.

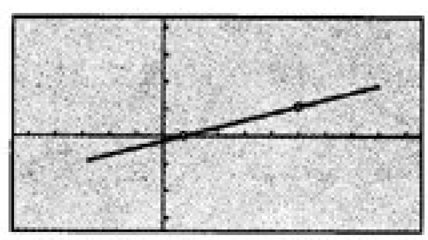


（第 2 题）

3. (1) 点 $(x，0)$ 和 $(5，y)$，即纵坐标为 0 或横坐标为 5 的点不能在图象上.

(2) 略.

说明　本题是一个开放性的题目，根据题意可以画出许多不同的图象. 第(1)问要求学生归纳出本题不同解答中的共同点，即无论画出何种图象，哪些点不能在图象上，这是一个从发散到收敛的思维过程.

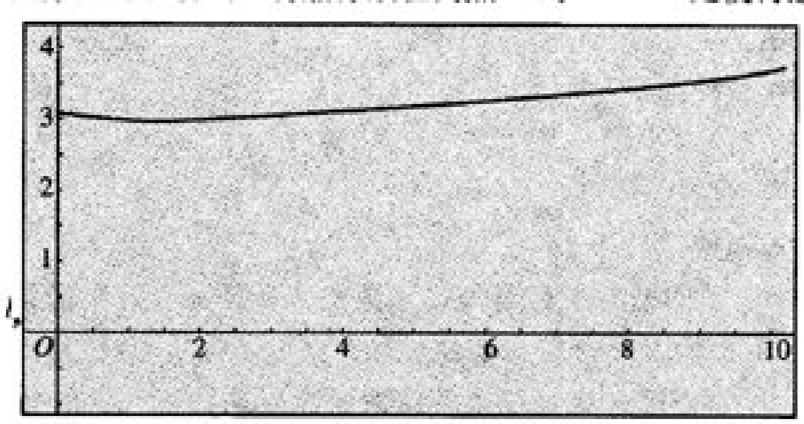


（第 3 题）

4. (1) $T(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3}+\dfrac{12-x}{5}$，$0\leqslant x\leqslant 12$；

(2) $T(4)=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}+\dfrac{8}{5}\approx 3.09$(h)；

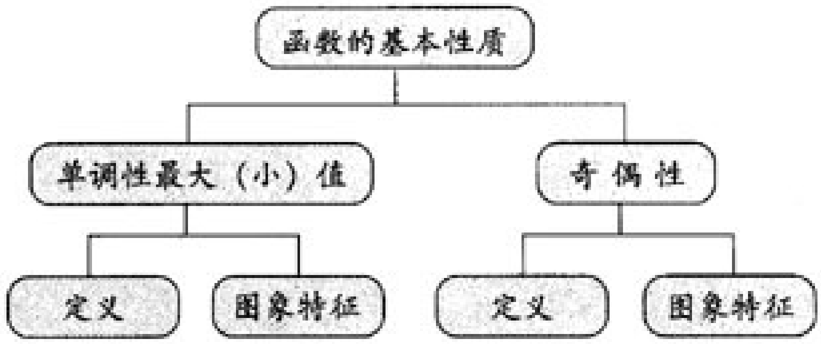
(3) 如下图，从图象上可以看出，将船停放在离点 P 约 1.5 km 处使得这个人花的时间最少.



（第 4 题）

1.3 函数的基本性质

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

函数的单调性、奇偶性是函数的两个基本性质，也是本节的教学重点．教学时，要特别重视让学生经历这些概念的形成过程．同时，要通过本节教学，使学生学会判断一些函数的单调性、奇偶性，用函数的单调性求一些函数的最大（小）值．

教学中可能遇到的困难是：

1．增（减）函数概念与奇（偶）函数形式化定义的形成．这个困难主要发生在概念形成过程中由特殊到一般的过渡，也就是对定义中“任意”的理解，建议教学时多给学生操作与思考的空间．

2．利用增（减）函数的定义判断函数的单调性．其主要原因是学生比较大小的能力不够，因此，对函数的复杂程度要加以控制，同时要帮助学生建立判断函数单调性的基本步骤．

三、编写意图与教学建议

讨论函数的性质，就是要研究函数的重要特征，它们是：

1．函数的增与减（单调性）；

2．函数的最大值、最小值；

3．函数的增长率、衰减率；

4．函数增长（减少）的快与慢；

5．函数的零点；

6．函数（图象）对称性（奇偶性）；

7．函数值的循环往复（周期性）．

这里先讨论函数的单调性、奇偶性，它们是描述函数整体特征的．观察函数图象时，首先注意到的是图象的上升或下降（单调性），是否具有某种对称性（奇偶性），然后是图象在某些特殊位置的状态（如最大值、零点）．但是由图象直观获得的结论还需要从数量关系的角度通过逻辑推理加以确认．

在内容处理上，教科书充分利用函数图象，让学生观察图象而获得对函数基本性质的直观认识，这样处理充分体现了数形结合的思想.

具体地，研究函数性质时经历了“三步曲”：

第一步，观察图象，描述函数图象特征；

第二步，结合图、表，用自然语言描述函数图象特征；

第三步，用数学符号的语言定义函数性质.

教学时，要特别重视从几个实例的共同特征到一般性质的概括过程，并要引导学生用数学语言表达出来．这往往是形成数学概念，培养学生探究能力的契机.

由于函数图象是发现函数性质的直观载体，因此，在本节教学时可以充分使用信息技术创设教学情境，以利于学生作函数图象，有更多的时间用于思考、探究函数的单调性、奇偶性等性质.

1.3.1 单调性与最大（小）值

1. 函数单调性教学的“三步曲”.

（1）以学生熟悉的一次函数 $f(x)=x$ 和二次函数 $f(x)=x^2$ 为例，给出函数的图象，让学生从图象获得“上升”“下降”的整体认识.

（2）针对二次函数 $f(x)=x^2$ 给出下面的表格：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$f(x)=x^2$	…	16	9	4	1	0	1	4	9	16	…

结合上面的表格，用自然语言描述图象特征“上升”“下降”，即

图象在 y 轴左侧“下降”，也就是，在区间 $(-\infty, 0]$ 上，随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 随着减小；图象在 y 轴右侧“上升”，也就是，在区间 $(0, +\infty)$ 上，随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 也随着增大.

（3）运用数学符号将自然语言的描述提升到形式化的定义．例如在实际教学时，可以让学生在区间 $(0, +\infty)$（或区间 $(-\infty, 0]$）上任意取定两个数值，然后计算出它们对应的函数值进行比较，便可验证上面的发现是正确的，但这不能保证“任意性”．这样，就把学生的思维引到了思考怎样说明“任意性”上来．从而有了下面的这个结论：

在区间 $(0, +\infty)$ 上，任取两个 x_1，x_2，得到 $f(x_1)=x_1^2$，$f(x_2)=x_2^2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$．这时，我们就说函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

在此基础上，可以让学生再自己举几个函数例子，仿照 $f(x)=x^2$ 讨论它们的单调性，以加深理解，然后推广到一般的情形，就得到增函数的概念.

2. 信息技术的使用.

有信息技术条件的学校，可以创设如下的教学情境让学生体会单调函数的数量变化规律：

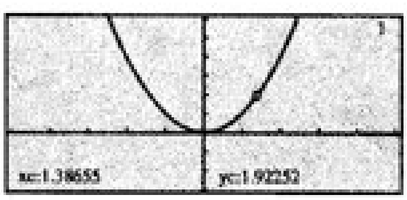


图 1-6

（1）用计算器或计算机作出函数 $y=x^2$ 的图象（图 1-6）；

（2）观察函数 $y=x^2$ 的图象，并描述该图象的变化规律（可引导学生观察图象的升降情况）；

（3）在函数 $y=x^2$ 的图象上任找一点 P，并测出其坐标；

（4）当点 P 在函数的图象上“按横坐标（即自变量）x 增大”的方向移动时，观察点 P 的纵坐标（即函数值）y 的变化规律；

（5）由学生总结规律后，给出增（减）函数的自然语言描述：在区间 I 上，若随着自变量 x 增大

函数值 y 也增大，则称函数在区间 I 上是增函数；在区间 I 上，若随着自变量 x 增大函数值 y 减少，则称函数在区间 I 上是减函数.

以上过程，一定要在教师的引导下由学生在计算器或计算机上实践，只有由学生自己获得“自变量 x 增大时函数值 y 也增大（减少）”这一变化规律后，再给出增（减）函数的自然语言描述，才会让学生觉得自然，并且印象深刻. 这样，也完成了单调函数从用图形语言表述到用自然语言表述的过渡.

（6）要使学生从单调函数的自然语言描述上升到符号语言的定义，可安排如下活动：

①让学生在区间 $[0, +\infty)$ 上，从 0 开始，每隔一个单位取一个自变量的值，然后用计算器或计算机算出其对应的函数值，得到下表：

x	y9
1.	1.
2.	4.
3.	9.
4.	16.
5.	25.
6.	36.
7.	49.
8.	64.

y9(x)=64.

②让学生在区间 $[0, +\infty)$ 上，从 9 开始，每隔 0.1 个单位取一个自变量的值，然后用计算器或计算机算出其对应的函数值，得到下表：

x	y9
9.	81.
9.1	82.81
9.2	84.64
9.3	86.49
9.4	88.36
9.5	90.25
9.6	92.16
9.7	94.09

y9(x)=94.09

③让学生在区间 $[0, +\infty)$ 上，从 10 开始，每隔 10 个单位取一个自变量的值，然后用计算器或计算机算出其对应的函数值，得到下表：

x	y9
10.	100.
20.	400.
30.	900.
40.	1600.
50.	2500.
60.	3600.
70.	4900.
80.	6400.

x=10.

④让学生在区间 $[0, +\infty)$ 上，任选一个自变量的值作起点，等间隔地取一批自变量的值，然后用计算器或计算机算出其对应的函数值，得到一个表，如：

x	y9
55.	3025.
55.3	3058.1
55.6	3091.4
55.9	3124.8
56.2	3158.4
56.5	3192.3
56.8	3226.2
57.1	3260.4

x=57.1

⑤让学生结合函数单调性的上述描述，观察以上表格，表述自己发现的规律；

⑥期望学生或引导学生得出结论：四个表格都说明，任选两个自变量的值，自变量大的函数值也大；

⑦让学生思考后概括出增函数的定义，并类似地得出减函数的定义.

3. 例题和习题教学分析.

对于例 1，学生很可能提出这样的一个问题：在两个区间的公共端点处，比如在点 $x=-2$ 处，这个函数是增函数还是减函数？这里应向学生说明，函数的单调性是对定义域内某个区间而言的. 其一，对于单独的一点，由于它的函数值是唯一确定的常数，因而没有增减变化，所以不存在单调性问题. 其二，虽然 $f(x)$ 在区间 $[-5,\ -2)$，$[1,\ 3)$ 上都是减函数，但不能说 $f(x)$ 在集合 $\{x \mid -5<x<-2$ 或 $1<x<3\}$ 上是减函数. 其三，有些函数在整个定义域内具有单调性，例如，函数 $y=kx+2$，当 $k\neq 0$ 时就是这样一个函数；有些函数在定义域内某些区间上是增函数，而在另一些区间上是减函数，如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 是减函数，在 $(0,\ +\infty)$ 是增函数；有些函数没有单调区间，或者它的定义域根本就不是区间，例如 1.2.2 小节例 3 中的函数

$$y=5x,\ x\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}.$$

例 2 有两个目的，一是利用函数的单调性证明物理学中的玻意耳定律，让学生感受到函数单调性的初步应用；二是表明用函数的单调性定义证明函数在某个区间上单调性的基本步骤. 其后的“探究”，可以让学生进一步理解函数单调性中的“任意性”. 同时，启发学生获得旁注所给的认识“通过观察图象，先对函数是否具有某种性质做出猜想，然后通过逻辑推理，证明这种猜想的正确性，是研究函数性质的一种常用的方法”.

例 3 是一个实际应用问题，这里需要物理中的斜抛运动知识作准备，如果学生无这方面的知识，教学时宜作适当的说明.

例 4 表明，高一阶段利用函数的单调性求函数的最大（小）值是常用的方法. 同时，又一次让学生体会用函数的单调性定义证明函数的单调性的方法.

本小节的 4 个练习可这样处理：第 1 题结合例 1 进行处理；第 4 题结合最大（小）值的概念进行处理；第 3 题结合例 2 进行处理；第 2 题是学生利用函数的单调性解释自然现象的好机会，应该让学生独立思考后画出函数图象进行交流.

4. 值得注意的问题.

（1）我们在中学阶段介绍的是定义在区间上的严格单调函数，大学里的单调函数通常定义在一般的数集上.

设函数 f 定义在数集 D 上，如果对 D 中任意的 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 f 是 D 上的单调增函数（单调减函数），统称为单调函数.

（2）函数的最大（小）值的定义，是借助于二次函数及其图象引出的，概念的出现仍然是遵循从特殊到一般的原则. 这里给出的两个“思考”，前一个“思考”是给学生提供尝试的机会，也为引出最大值的概念做个准备. 第二个“思考”，是让学生学会用类比的方法独立获得最小值的概念.

1.3.2　奇偶性

1. 函数奇偶性教学的“三步曲”.

教科书在处理函数的奇偶性时，沿用了处理函数单调性的方法，即先给出几个特殊函数的图象，让学生通过图象直观获得函数奇偶性的认识，然后利用表格探究数量变化特征，通过代数运算，验证发现的数量特征对定义域中的“任意”值都成立，最后在这个基础上建立奇（偶）函数的概念.

2. 信息技术的使用.

利用信息技术工具创设如下的教学情境，会使数与形的结合表现得更加自然，例如：

（1）让学生用计算器或计算机作出函数 $f(x)=x^2$ 的图象（图 1-7）；

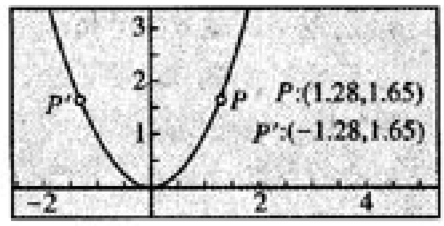


图 1-7

在图象上任取一点 P，作出点 P 关于 y 轴对称的点 P'，发现点 P' 也在函数的图象上；

（2）测出点 P 与点 P' 的坐标，改变点 P 的位置，发现总有 $f(-x)=f(x)$.

上述活动过程，从数与形两个方面丰富了学生对偶函数的认识. 同时，学生很自然地会产生以下猜想：对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$是否成立？这是不难实现的. 这就使偶函数概念的建立变得自然、严谨.

教科书在获得偶函数概念后，给出了两个函数 $f(x)=x^2+1$，$f(x)=\frac{2}{x^2+1}$加以说明. 教学时，不仅要引导学生从偶函数的定义去思考，同时可以让学生自己想象一下这两个函数的图象，如果有条件，可让学生用计算器或计算机自己画一画函数的图象.

3. 值得注意的问题.

（1）对于奇函数，教科书在给出的表格中留下大部分空格，旨在让学生自己动手计算填写数据，仿照偶函数概念建立的过程，独立地去经历发现、猜想与证明的全过程，从而建立奇函数的概念.

（2）教科书第 41 页上的“思考”，意在让学生利用函数的奇偶性画函数的图象. 教学时，可将练习的第 1 题与之配合. 奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称，所以，奇（偶）函数有一个很重要的性质，就是 x 轴上表示函数的定义域的点的集合一定关于原点对称.

（3）教学时，可以通过具体例子引导学生认识，并不是所有的函数都具有奇偶性，如函数 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$既不是奇函数也不是偶函数，这可以从图象上看出，也可以由定义去说明，因为它们的定义域分别是$[0,+\infty)$与$(0,+\infty)$，即 x 取负值时函数无意义，所以不能满足奇函数与偶函数的定义.

（4）例 5 的教学可与练习的第 2 题结合进行，主要目的是让学生学会用奇偶性的定义去判断函数的奇偶性. 判断一个函数是奇函数，或者是偶函数，或者既不是奇函数也不是偶函数，叫做判断函数的奇偶性. 这是在研究函数的性质时应予考察的一个重要方面. 对于一个奇函数或偶函数，根据它的图象关于原点或 y 轴对称的特性，就可由自变量取正值时的图象和性质，来推断它在整个定义域内的图象和性质.

四、教学设计案例

函数的单调性（第 1 课时）

1. 教学任务分析

（1）建立增（减）函数的概念.

通过观察一些函数图象的升降，形成增（减）函数的直观认识. 再通过具体函数值的大小比较，认识函数值随自变量的增大而增大（减小）的规律，由此得出增（减）函数的定义. 掌握用定义证明函数单调性的基本方法与步骤.

（2）函数单调性的研究经历了从直观到抽象，从图形语言到数学语言，理解增函数、减函数、单调区间概念的过程，在这个过程中，让学生通过自主探究活动，体验数学概念的形成过程，使学生学习数学思考的基本方法，培养学生的数学思维能力.

2. 教学重点与难点

重点：形成增（减）函数的形式化定义.

难点：形成增（减）函数概念的过程中，如何从图象升降的直观认识过渡到函数增减的数学符号语言表述；用定义证明函数的单调性.

3. 教学基本流程

从观察具体函数图象引入 → 直观认识增（减）函数 → 定量分析增（减）函数 → 给出增（减）函数的定义 → 由图象说出函数的单调区间 → 利用定义证明函数单调性 → 练习、交流、反馈、巩固 → 学生归纳小结、教师评价

4. 教学情境设计

问　　题	设 计 意 图	师　　生　　活　　动
（1）由图 1.3-1，你能说出函数图象有什么特点？	启发学生由图象获取函数性质的直观认识，从而引入新课.	师：引导学生观察图象的升降变化导入新课. 生：看图，并说出自己的看法.
（2）函数 $y=x$ 的图象是如何变化的？	体会函数 $y=x$ 的图象是上升的.	师：引导学生从左至右看 $y=x$ 的图象如何变化. 生：观察 $y=x$ 的图象从左至右的变化情况，并回答问题（图象是上升的）.
（3）你能描述一下函数 $y=x^2$ 的图象的升降规律吗？	体会同一函数在不同区间上的变化差异.	师：启发学生获取函数 $y=x^2$ 的图象的升降特点，并将其与函数 $y=x$ 的特点进行比较. 生：观察图象，发现函数 $y=x^2$ 的图象在 y 轴左侧是下降的，在 y 轴右侧是上升的. 比较函数 $y=x$ 与 $y=x^2$ 的图象，指出它们的不同特点.
（4）从上面的观察分析，能得出什么结论？	学生回答后教师归纳：从上面的观察分析可以看出：不同的函数，其图象的变化趋势不同，同一函数在不同区间上的变化趋势也不同. 函数图象的这种变化规律就是函数性质的反映. 这就是我们今天所要研究的函数的一个重要性质——函数的单调性（引出课题）.	
（5）$y=x^2$ 的图象在 y 轴右侧是上升的，如何用数学符号语言来描述这种“上升”呢？	指导学生从定性分析到定量分析，从直观认识过渡到数学符号表述.	师：指导学生完成 $y=x^2$ 的对应值表 1.3-1，并观察表格中，自变量 x 的值从 0 到 5 变化时，函数值 y 如何变化. 生：填表并回答问题（自变量 x 的值增大，函数值 y 增大）. 师：在 $(0,+\infty)$ 上，任意改变 x_1，x_2 的值，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $x_1{}^2<x_2{}^2$ 吗？ 生：随意给出一些 $(0,+\infty)$ 上的 x_1，x_2 的值，当 $x_1<x_2$ 时，验证是否都有 $x_1{}^2<x_2{}^2$（可以借助计算器）. 师：由此你能得出什么结论？ 生：表述各自的结论. 师：对学生得出的结论给予评价，然后提出：刚才我们所验证的是一些具体的、有限个自变量的值，对于 $(0,+\infty)$ 上任意的 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，是否都有 $x_1{}^2<x_2{}^2$ 呢？

续表

问　　题	设　计　意　图	师　　生　　活　　动
		生：思考如何验证教师提出的问题，并将自己的想法与同学交流． 教师引导学生得出：函数 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$上图象是上升的，用函数解析式来描述就是：对于 $(0,+\infty)$ 上的任意的 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $x_1{}^2<x_2{}^2$．即函数值随着自变量的增大而增大．具有这种性质的函数叫增函数．
（6）如何定义增函数？	从具体到一般引出增函数的定义．	师：对于一般的函数 $y=f(x)$，我们应当如何给增函数下定义？ 引导学生讨论、交流，说出各自的想法，并进行分析、评价，补充完善后给出增函数的定义．
（7）从函数图象上可以看到，$y=x^2$ 的图象在 y 轴左侧是下降的．类比增函数的定义，你能概括出什么结论？	得出减函数的定义，并由此培养学生类比的能力．	教师引导学生观察 $y=x^2$ 的图象和在区间$(-\infty,0)$上的对应值表，并思考：如何用数学语言描述“函数图象在区间 $(-\infty,0)$ 上下降”？ 学生通过观察、验证、讨论、交流后表述各自的结论． 师生共同得出减函数的定义．
（8）你能分析一下增（减）函数定义的要点吗？	使学生加深对增（减）函数的认识．	教师引导学生分析增（减）函数的定义的数学表述，体会定义中关于“单调区间内任意两个自变量都有……”的含义．
（9）自学例1并解决习题1.3中第5题．	巩固概念，并培养学生的自学能力．	师：指导学生阅读教科书上的例1． 生：阅读教科书上的例1，并完成习题1.3中第5题．
（10）通过学习教科书上的例2，你能总结一下证明一个函数是某个区间上的增（减）函数的步骤吗？	使学生熟悉用定义证明函数为增（减）函数的基本步骤．	生：阅读例2． 师：分析例2并板书证明． 师：启发学生概括用定义证明函数为增（减）函数的一般步骤，注意给学生留有总结思考的时间． 生：交流自己总结的步骤． 师：板书证明步骤．
（11）课堂练习：教科书第38页练习第1、2题．练习的目的是启发学生利用单调函数的概念解决与递增（减）有关的简单实际问题．		
（12）函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域 I 是什么？它在定义域 I 上的单调性是怎样的？你能用定义证明自己的结论吗？	让学生进一步认识到函数的单调性是离不开区间的．	生：写出函数的定义域，通过画出函数的图象得出函数的单调性． 师：启发学生思考：函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是减函数吗？ 生：思考问题，发现函数的单调区间不能求并；用增（减）函数的定义证明自己得出的单调性．
（13）课堂小结： 教师提出下列问题让学生思考： ① 通过增（减）函数概念的形成过程，你学习到了什么？ ② 增（减）函数的图象有什么特点？如何根据图象指出单调区间？ ③ 怎样用定义证明函数的单调性？ 师生共同就上述问题进行讨论、交流、总结，让学生充分发表自己的意见．		
作业：习题1.3A组：1、2、4题．		

5. 几点说明

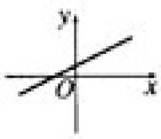
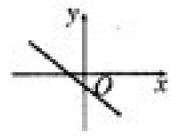
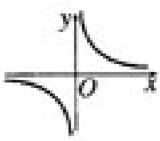
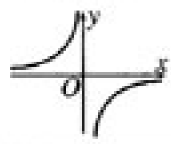
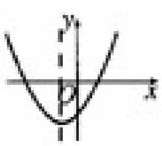
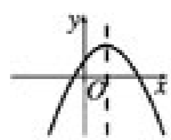
（1）本堂课容量大，建议使用信息技术创设教学情境，特别是验证“对于$(0, +\infty)$上任意的x_1，x_2的值，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$”.

（2）增（减）函数的定义有如下要点：

增（减）函数是相对定义域I内的某个区间D（即$D\subseteq I$）而言的；

x_1，x_2必须是区间D内任意两个自变量的取值，而不是某些特殊值.

（3）可用下面的图表归纳三类简单函数的单调性.

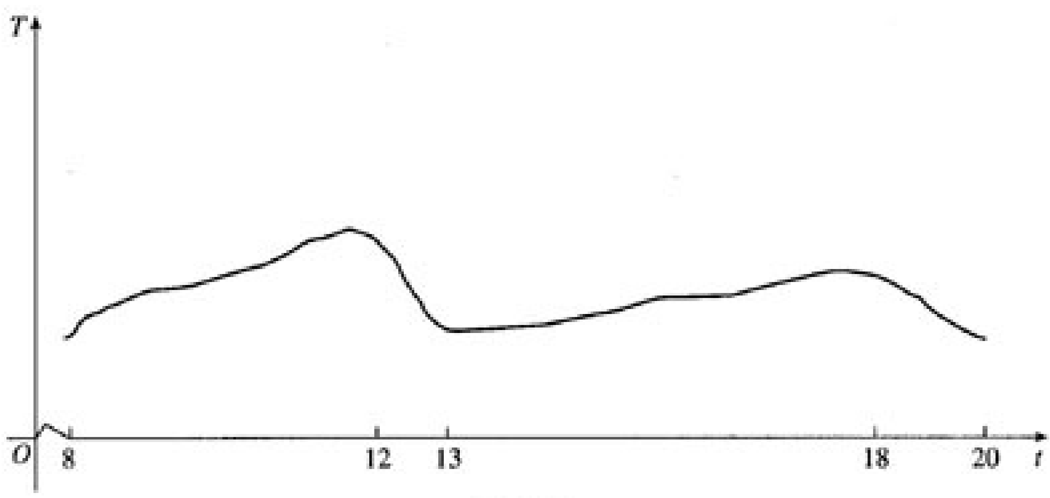
	在$(-\infty, +\infty)$是增函数.		在$(-\infty, +\infty)$是减函数.
	在$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$是减函数.		在$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$是增函数.
	在$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$是减函数.		在$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$是增函数.
	在$\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$是增函数.		在$\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$是减函数.

五、习题解答

练习（第38页）

1. 在一定范围内，生产效率随着工人数的增加而提高，当工人数达到某个数量时，生产效率达到最大值，而超过这个数量时，生产效率又随着工人数的增加而降低. 由此可见，并非是工人越多，生产效率就越高.

2.



（第2题）

增区间为：[8, 12]，[13, 18]；减区间为：[12, 13]，[18, 20].

3. 证明：任取$x_1, x_2\in \mathbf{R}$，且$x_1<x_2$，因为

$$f(x_1)-f(x_2)=2(x_2-x_1)>0,$$

即

$$f(x_1)>f(x_2),$$

所以 $f(x)=-2x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

4. 最小值.

练习（第42页）

1. 略.

2. (1) 函数 $f(x)=2x^4+3x^2$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，因为对定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2=2x^4+3x^2=f(x),$$

所以，函数 $f(x)=2x^4+3x^2$ 为偶函数.

(2) 函数 $f(x)=x^3-2x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，因为对定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=(-x)^3-2(-x)=-(x^3-2x)=-f(x),$$

所以，函数 $f(x)=x^3-2x$ 为奇函数.

习题1.3（第45页）

A组

1. $m<0$ 时，$y=mx+b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，$m>0$ 时，$y=mx+b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数．证明如下：

任取 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=m(x_1-x_2),$$

由题设有 $x_1-x_2<0$，当 $m<0$ 时，$m(x_1-x_2)>0$，所以

$$f(x_1)-f(x_2)>0.$$

于是

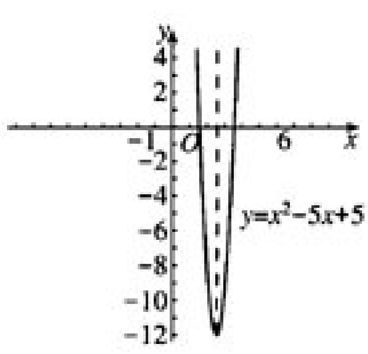
$$f(x_1)>f(x_2),$$

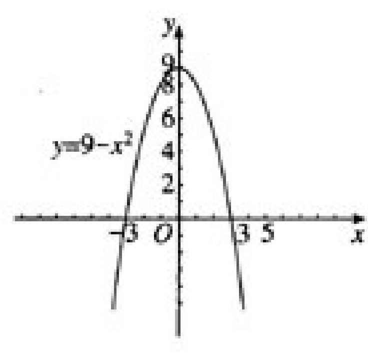
所以 $f(x)=mx+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

同理可证，$m>0$ 时，$y=mx+b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

2. (1) 函数 $y=x^2-5x+5$ 的图象如图所示，它在 $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ 上是减函数，在 $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 上是增函数.

(2) 函数 $y=9-x^2$ 的图象如图所示，它在 $(-\infty, 0]$ 上是增函数，$[0, +\infty)$ 是减函数.





（第2题）

3. (1) $f(x)=x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数．证明如下：

任取 x_1，$x_2\in(-\infty, 0)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2$$
$$=(x_1-x_2)(x_1+x_2).$$

由题设有 $x_1-x_2<0$，当 x_1，$x_2\in(-\infty, 0)$时，$x_2+x_1<0$，所以

$$f(x_1)-f(x_2)>0.$$

于是

$$f(x_1)>f(x_2),$$

所以 $f(x)=x^2+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.

(2) 任取 x_1, $x_2\in(-\infty, 0)$, 且 $x_1<x_2$, 则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}.$$

由题设有 $x_1-x_2<0$, 当 x_1, $x_2\in(-\infty, 0)$ 时, $x_1x_2>0$, 所以

$$f(x_1)-f(x_2)<0.$$

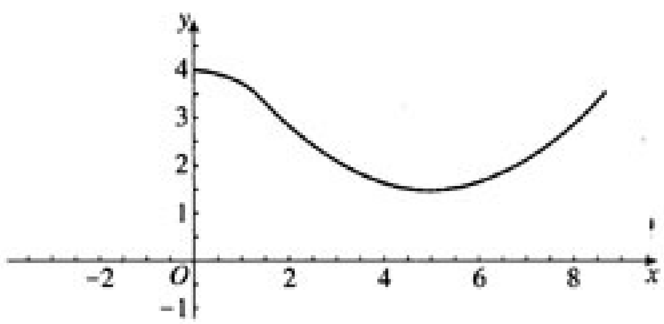
于是

$$f(x_1)<f(x_2),$$

所以函数 $f(x)=1-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数.

4. 函数在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 在 $[0, 2]$ 上是增函数, 在 $[2, 4]$ 上是减函数, 在 $[4, +\infty)$ 上是增函数.

5. 自服药那一刻起, 心率关于时间的一个可能的图象如图所示.



(第 5 题)

6. (1) 每一个月的前 15 天不断增加, 后 15 天不断减少.

(2) 鹿群在第一个月的第 15 天数量最多, 第一天和最后一天数量最少.

7. 设矩形熊猫居室的宽为 x 米, 面积为 y 平方米, 则长为 $\frac{30-3x}{2}$ 米, 那么

$$\begin{aligned}y&=x\,\frac{30-3x}{2}\\&=-\frac{3(x^2-10x)}{2}\\&=\frac{-3(x-5)^2+75}{2}.\end{aligned}$$

所以, 当 $x=5$ 时, y 有最大值 37.5.

答: 宽 x 为 5 米时才能使所建造的熊猫居室面积最大, 最大面积是 37.5 平方米.

8. 设储存器内水量为 y 升, 则由题设有

$$\begin{aligned}y&=2t^2-34t+200\\&=2\left(t-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{111}{2}.\end{aligned}$$

所以当 $t=8.5$ 时, 储存器内水量为 y 达到最小值, 此时放水停止.

总共实际放水为 $8.5\times34=289$ (升), 又 $289\div65=4\frac{29}{65}$, 所以一次至多可供 4 人洗浴.

答：一次至多可供 4 人洗浴.

9.（1）函数 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，对定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=\frac{2}{(-x)^2+1}=\frac{2}{x^2+1}=f(x),$$

所以，函数 $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ 为偶函数.

（2）函数 $f(x)=x^3$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，因为对定义域内的每一个 x，都有

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x),$$

所以，函数 $f(x)=x^3$ 为奇函数.

10. B.

B 组

1.（1）$f(x)=x$，$x>0$ 和 $g(x)=x^2+2x$ 都不具有奇偶性.

（2）并非所有的函数都具有奇偶性. 例如 $f(x)=x$，$x>0$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，对于定义域中的 x，$-x\notin(0, +\infty)$，$f(-x)$ 未定义，所以，$f(x)=x$，$x>0$ 不具有奇偶性.

虽然 $g(x)=x^2+2x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，但 $f(-1)\neq f(1)$，所以，$g(x)=x^2+2x$ 不具有奇偶性.

2. 偶函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，那么 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数. 证明如下：

设 $x_1<x_2<0$，则 $-x_1>-x_2>0$，因为函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，所以

$$f(-x_1)<f(-x_2),$$

又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以

$$f(-x_1)=f(x_1),\ f(-x_2)=f(x_2).$$

于是

$$f(x_1)<f(x_2),$$

所以，偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数.

3. 设矩形牧场的宽为 w，长为 l，周长为 p，根据题意有

$$lw=2\,000,$$

于是

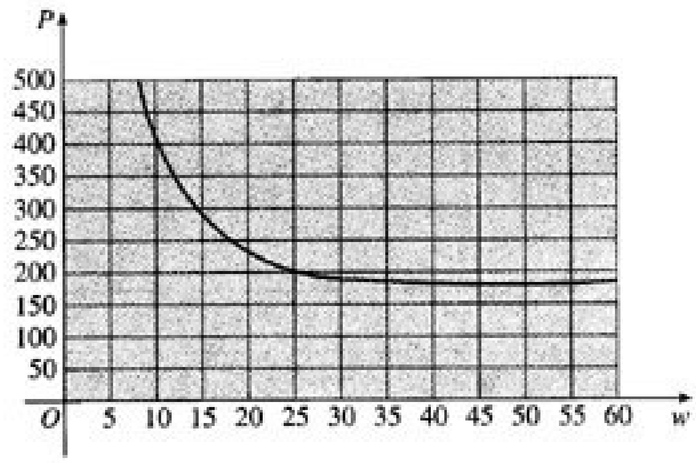
$$l=\frac{2\,000}{w},$$

所以

$$p=2w+2l=2w+\frac{4\,000}{w}.$$

利用计算机或计算其画出函数 $p(w)=2w+\dfrac{4\,000}{w}$ 的图象，通过观察，我们发现函数约在 $w=45$ 时取得最小值.

如果想获得更精细的 p 的值，用计算机或计算器分别计算当 $w=44.5$，44.6，44.7，44.8，44.9，45，45.1，45.2，45.3，…时 p 的值，发现 $w=44.7$ 时，p 最小；再取 $w=44.65$，44.66，44.67，44.68，44.69，44.7，44.71，44.72，44.73，…时 p 的值，发现 $w=44.72$ 时，p 最小；再取 $w=44.715$，44.716，44.717，44.718，44.719，44.72，45.721，45.722，45.723，…时 p 的值……直到获得达到精度要求的近似值.



（第3题）

说明 通过指导学生利用计算机或计算器从图象和数值两个方面估计 p 的最小值的近似值，让学生体会两种不同估计方法的同时感受逼近的思想.

实习作业

1. 教学任务分析

本节内容主要是体现数学文化方面的内容，目的是让学生了解函数概念的发展历史及在这个过程中起重大作用的历史事件和人物.

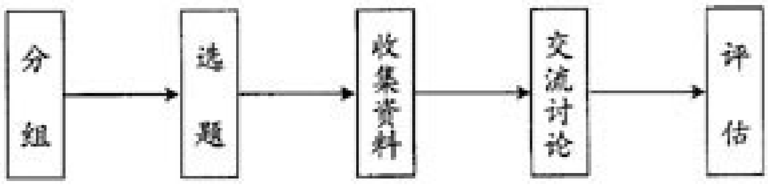
（1）通过学生直接到图书馆、阅览室、电脑室等获得第一手资料，经过自己的收集、筛选、整理，形成简明的文字材料的过程，更好地理解函数概念的形成发展过程.

（2）通过合作学习品尝分享获得知识的快乐.

（3）学习方式上要发挥学生的主动性，让学生自主地完成实习作业；教师要注意对学生活动进行引导.

（4）实习作业需要教师精心设计，只有这样才能“让教师做最好的导演，让学生做最好的演员”，这也是实习作业的目标之一.

2. 教学基本流程



3. 实习作业中应关注的问题

（1）教师的设计包括以下几个方面：

①分组：应考虑到学生自身的兴趣和他们的实际情况采取相应的分组方法.

②选题：尽量避免所有的小组选同一个实习题目，尽量多地选不同的题目可以让所有的学生在学习共享的过程中受得更多的数学文化的熏陶.

③交流讨论：应关注每一小组的交流讨论，并给予恰当的指导.

④评估：对学习活动和结果进行评估，并注重活动过程的反思.

（2）学生的活动内容主要是：

根据主题和任务，分工协作，明确各自的任务；收集和整理资料，并与同学进行讨论、交流，得出新的结论；完成实习报告，汇报小组成果.

4. 实习作业评价参考意见

级　别	标　　　准
很好	● 小组配合默契（如计划、任务分配合理，每个成员积极认真）. ● 报告材料丰富、可靠，线索清晰. ● 拥有自己的独立见解.
好	● 小组配合良好. ● 报告材料较丰富、可靠，线索较清晰. ● 有一定的独立见解.
一般	● 小组配合一般. ● 报告材料一般，线索基本清晰. ● 有一定的分析.
较差	● 小组配合欠佳. ● 报告材料贫乏，线索不够清晰.

复习参考题（第 50 页）解答

A 组

1. （1）$A=\{-3, 3\}$；　　（2）$B=\{1, 2\}$；　　（3）$C=\{1, 2\}$.

2. （1）集合的点组成线段 AB 的垂直平分线；

（2）集合的点组成以 O 为圆心，3 cm 为半径的圆.

3. 因为集合$\{P \mid PA=PB\}$的点组成线段 AB 的垂直平分线，集合$\{P \mid PA=PC\}$的点组成线段 AC 的垂直平分线，所以集合$\{P \mid PA=PB\}\cap\{P \mid PA=PC\}$的点到三角形的三个顶点的距离相等，即是三角形的外心.

4. 集合 $A=\{-1, 1\}$，则

（1）当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，显然，$B\subseteq A$；

（2）当 $a\neq 0$ 时，$B=\left\{\frac{1}{a}\right\}$，要使 $B\subseteq A$，必须$\frac{1}{a}\in A$，从而

$$\frac{1}{a}=-1 \text{ 或 } \frac{1}{a}=1.$$

即

$$a=-1 \text{ 或 } a=1.$$

综上可知，若 $B\subseteq A$，a 的值为 0，-1，1.

5. $A\cap B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}2x-y=0\\3x+y=0\end{cases}\right\}=\{(0,0)\}$；

$A\cap C=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}2x-y=0\\2x-y=3\end{cases}\right\}=\varnothing$；

$(A\cap B)\cup(B\cap C)=\{(0, 0), (\frac{3}{5}, -\frac{9}{5})\}$.

6. （1）$\{x \mid x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 2\}$.

（2）$\{x \mid x\geqslant 2\}$.

(3) $\{x \mid x \geqslant 4, 且 x \neq 5\}$.

7. (1) $f(a)+1=\frac{1-a}{1+a}+1=\frac{2}{1+a}$.

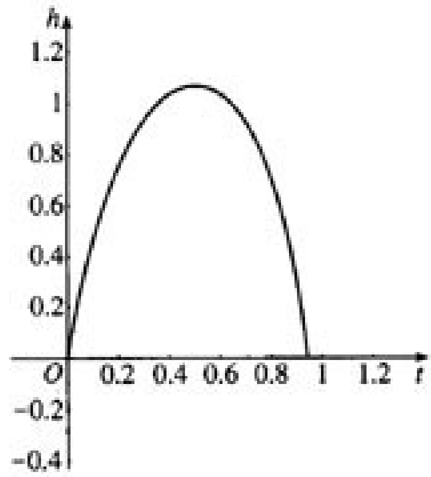
(2) $f(a+1)=\frac{1-(a+1)}{1+(a+1)}=-\frac{a}{a+2}$.

8. 证明：(1) $f(-x)=\frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\frac{1+x^2}{1-x^2}=f(x)$.

(2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\frac{1+x^2}{1-x^2}=-f(x)$.

9. (1) 函数图象如右所示.

(2) 由二次函数 $h(t)=4.6t-4.9t^2$ 可知鲍勃跳跃时 h 的最大高度约为 1.08 m.



(第 9 题)

10. 当 $k=0$ 时，$f(x)=-4x-8$，它是$[5, 20]$上的单调减函数.

当 $k\neq 0$ 时，有下列两种情形：

(1) $k>0$

当$\frac{2}{k}\geqslant 20$，即 $0<k\leqslant\frac{1}{10}$时，$f(x)$在$[5, 20]$上是减函数；

当$\frac{2}{k}\leqslant 5$，即 $k\geqslant\frac{2}{5}$时，$f(x)$在$[5, 20]$上是增函数.

(2) $k<0$

$\frac{2}{k}<5$ 恒成立，$f(x)$在$[5, 20]$上是减函数.

综上可知，实数 k 的取值范围是$\left\{k \,\middle|\, k\leqslant\frac{1}{10}或 k\geqslant\frac{2}{5}\right\}$.

11. (1) 偶函数.

(2) 关于 y 轴对称.

(3) 减函数.

(4) 增函数.

12. (1) 由题意得

$$f(x)=\begin{cases}(x-800)\times 5\%, & 800<x\leqslant 1\,300, \\ 25+(x-1\,300)\times 10\%, & 1300<x\leqslant 2\,800, \\ 175+(x-2\,800)\times 15\%, & 2800<x\leqslant 5\,800, \\ 625+(x-5\,800)\times 20\%, & 5800<x\leqslant 10\,000.\end{cases}$$

图略.

(2) 某人某月缴纳个人所得税为 120 元，由(1)中解析式可知他这个月的工资、薪金收入应该在 1300 到 2800 元之间. 即

$$25+10\%\times(x-1300)=120.$$

解得
$$x=2\,250.$$

答：这个人这个月的工资、薪金收入是 2 250 元.

13. 令 $f(x)=0$ 得

$$-\frac{2}{105}(x-105)^2+210=0,$$

即

$$(x-105)^2=105^2,$$

解得　$x_1=0$，$x_2=210$.

所以拱形门的宽约为210米．又当$x=105$时，$f(x)$取得最大值210，所以拱形门高大约为210米.

14. （1）汽车行驶全程所需时间为$t=\frac{s}{v}$，由题设有

$$\begin{aligned}y&=(a+bv^2)\ t\\&=(a+bv^2)\ \frac{s}{v}\\&=\frac{as}{v}+bsv.\end{aligned}$$

所以，全程运输成本y元与速率v km/h间的函数关系为

$$y=\frac{as}{v}+bsv,\ v\in(0,\ c].$$

（2）$$\begin{aligned}y&=\frac{as}{v}+bsv\\&=s\left[\left(\sqrt{\frac{a}{v}}\right)^2+(\sqrt{bv})^2-2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}\right]\\&=s\left(\sqrt{\frac{a}{v}}-\sqrt{bv}\right)^2+2s\sqrt{ab}\end{aligned}$$

若$\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$，则当$v=\sqrt{\frac{a}{b}}$时，$y$达到最小值$2s\sqrt{ab}$；

若$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$，则$y=\frac{as}{v}+bsv$在$\left(0,\ \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$上是减函数，证明如下：

令$y=f(v)=\frac{as}{v}+bsv$，任取v_1，$v_2\in(0,\ \sqrt{\frac{a}{b}})$，且$v_1<v_2$，则

$$\begin{aligned}f(v_1)-f(v_2)&=bs(v_1-v_2)+as\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)\\&=(v_1-v_2)\left(bs-\frac{as}{v_1v_2}\right).\end{aligned}$$

由题设有$0<v_1v_2<\frac{a}{b}$，那么

$$\frac{a}{v_1v_2}>b,$$

所以

$$(v_1-v_2)\left(b-\frac{a}{v_1v_2}\right)>0.$$

所以$f(v_1)>f(v_2)$，即$y=f(v)=\frac{a}{v}+bv$在$\left(0,\ \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$上是减函数.

因此，当$v=c$时，$y=\frac{as}{v}+bsv$达最小值$\frac{as}{c}+bsc$.

答：当$a\leqslant bc^2$时，为使全程运输成本最小，汽车应该以$\sqrt{\frac{a}{b}}$ km/h的速率行驶；当$a>bc^2$时，为使全程运输成本最小，汽车应该以c km/h的速率行驶.

B组

1. (1) 将题中文字语言转化为数学符号语言.

文字语言	数学符号语言
高一 (1) 28 名同学参加比赛	记 28 名参加比赛学生构成的集合为 U
参加游泳比赛的同学	记参加游泳比赛的同学构成的集合为 A
参加田径比赛的同学	记参加田径比赛的同学构成的集合为 B
参加球类比赛的同学	记参加球类比赛的同学构成的集合为 C
同时参加游泳和田径比赛的同学	$A\cap B$
同时参加游泳和球类比赛的同学	$A\cap C$
同时参加田径和球类比赛的同学	$B\cap C$
同时参加三项比赛的同学	$A\cap B\cap C$
只参加游泳一项比赛的同学	$A\cap \complement_U(B\cup C)$

(2) 把题中量的关系用数学符号语言表示，用 $n(P)$ 表示集合 P 中的元素.

文字语言	数学符号语言
高一 (1) 28 名同学参加比赛	$n(U)=28$
15 人参加游泳比赛	$n(A)=15$
8 人参加田径比赛	$n(B)=8$
14 人参加球类比赛	$n(C)=14$
同时参加游泳和田径比赛的有 3 人	$n(A\cap B)=3$
同时参加游泳和球类比赛的有 3 人	$n(A\cap C)=3$
同时参加田径和球类比赛的人	$n(B\cap C)$
没有人同时参加三项比赛	$n(A\cap B\cap C)=0$
只参加游泳一项比赛	$n(\complement_U(B\cup C))$

(3) 构建解决问题的模型.

各集合间的关系可以用下图表示.

(4) 解决数学问题.

由下图可得

$n(U)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

因为 $n(U)=28$，$n(A)=15$，$n(B)=8$，$n(C)=14$，$n(A\cap B)=3$，$n(A\cap C)=3$，$n(A\cap B\cap C)=0$，所以

$$28=15+8+14-3-3-n(B\cap C)+0.$$

可得

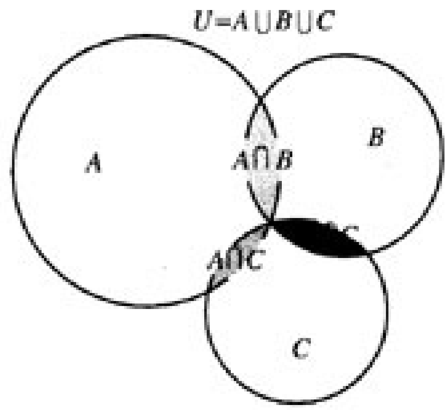
$$n(B\cap C)=3.$$

又

$$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$$
$$=8+14-3$$
$$=19.$$

所以

$$n(\complement_U(B\cup C))=n(U)-n(B\cup C)$$
$$=28-19$$
$$=9.$$



（第1题）

（5）回答问题.

答：同时参加田径和球类比赛有3人，只参加游泳一项比赛的有9人.

说明 本题的解决过程中渗透了数学建模的思想，其解题步骤具有一般性，可作为解决数学应用题的一种范型.

2. $a\geqslant 0$.

3. 如右图，因为 $\complement_U(A\cup B)=\{1，3\}$，所以

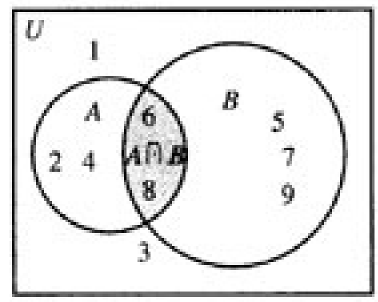
$$A\cup B=\{2，4，5，6，7，8，9\}.$$

又

$$A\cap(\complement_U B)=\{2，4\}.$$

所以

$$B=\{5，6，7，8，9\}.$$



（第3题）

4. $f(1)=5$，$f(-3)=21$，$f(a+1)=\begin{cases}(a+1)(a+5)，& a\geqslant -1，\\(a+1)(a-3)，& a<-1.\end{cases}$

5. 证明：（1）$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b=\frac{ax_1+b}{2}+\frac{ax_2+b}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

（2）左 $=g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}(x_1{}^2+x_2{}^2+2x_1x_2)+a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b，$$

右 $=\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$

$$=\frac{1}{2}[(x_1{}^2+ax_1+b)+(x_2{}^2+ax_2+b)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_1{}^2+x_2{}^2)+a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b，$$

因为 $\frac{1}{4}(x_1{}^2+x_2{}^2+2x_1x_2)-\frac{1}{2}(x_1{}^2+x_2{}^2)=-\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2\leqslant 0$，即

$$\frac{1}{4}(x_1{}^2+x_2{}^2+2x_1x_2)\leqslant\frac{1}{2}(x_1{}^2+x_2{}^2)，$$

所以

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}.$$

6. （1）奇函数 $f(x)[-b，-a]$ 上也是减函数. 证明如下：

设 $-b<x_1<x_2<-a$，则 $a<-x_2<-x_1<b$.

因为 $f(x)$ 在 $[a, b](0<a<b)$ 上是减函数，所以

$$f(-x_2)>f(-x_1),$$

又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以

$$f(-x)=-f(x),$$

于是

$$-f(x_2)>-f(x_1),$$

即

$$f(x_1)>f(x_2).$$

所以，$f(x)$ 在 $[-b, -a]$ 上是减函数.

(2) 偶函数 $g(x)$ 在 $[-b, -a]$ 上是减函数. 证明如下：

设 $-b<x_1<x_2<-a$，则 $a<-x_2<-x_1<b$.

因为 $g(x)$ 在 $[a, b](0<a<b)$ 上是增函数，所以

$$g(-x_2)<g(-x_1).$$

又因为 $g(x)$ 是偶函数，所以

$$g(-x)=g(x).$$

于是

$$g(x_1)>g(x_2).$$

所以，$g(x)$ 在 $[-b, -a]$ 上是减函数.

7. (1) 规定 $f(0)=1$. 表示没有用水清洗时，衣物上的残留脏物没有变化；

(2) 设清洗前衣物上的残留脏物为 1，那么用 a 单位量的水清洗 1 次后，残留的脏物为

$$W_1=1\times f(a)=\frac{1}{1+a^2},$$

又如果用 $\frac{a}{2}$ 单位量的水清洗 1 次，残留的脏物为

$$1\times f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

此后再用 $\frac{a}{2}$ 单位量的水清洗 1 次后，残留的脏物为

$$\begin{aligned} W_2&=\frac{1}{1+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot f\left(\frac{a}{2}\right)\\ &=\frac{16}{(4+a^2)^2}. \end{aligned}$$

由于

$$W_1-W_2=\frac{1}{1+a^2}-\frac{16}{(4+a^2)^2}=\frac{a^2(a^2-8)}{(1+a^2)(4+a^2)^2},$$

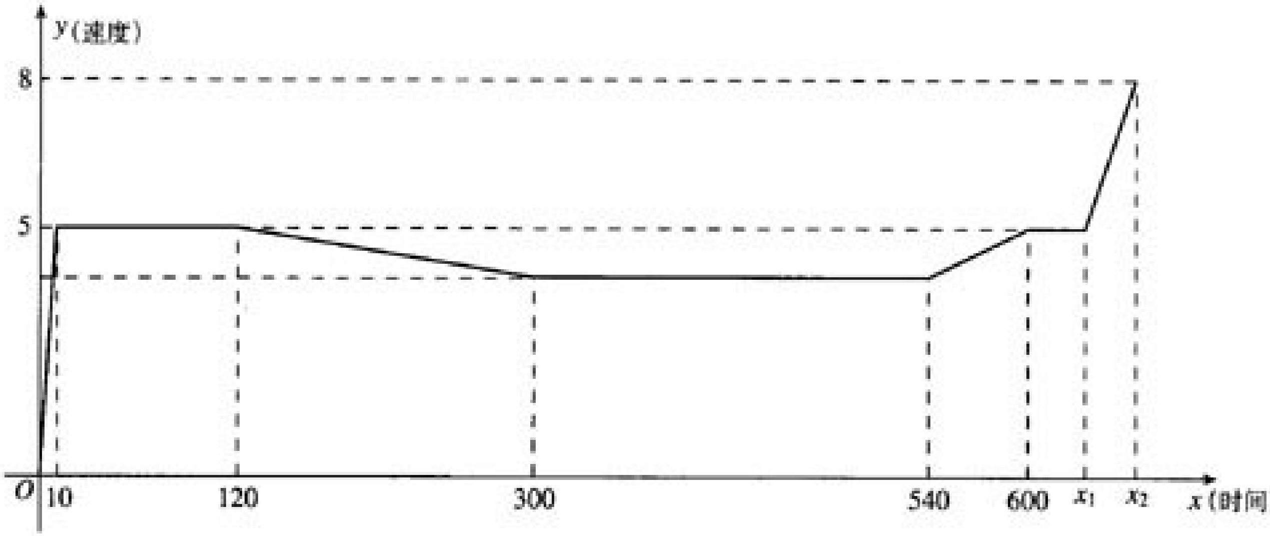
因此，W_1-W_2 的符号由 a^2-8 决定，即

当 $a>2\sqrt{2}$ 时，$W_1>W_2$. 此时，把 a 单位的水平均分成 2 份后，清洗两次，残留的脏物较少；

当 $a=2\sqrt{2}$ 时，$W_1=W_2$. 此时，两种清洗方式效果一样；

当 $0<a<2\sqrt{2}$ 时，$W_1<W_2$. 此时，用 a 单位量的水一次清洗残留的脏物较少.

8.（1）小刚跑步的速度 y 与时间 x 的函数图象为



（第 8 题）

（2）前 10 秒跑了 25 米（因为 $a=0.5\ \mathrm{m/s}$，$S=\frac{1}{2}at^2=25$ 米）；

从 10 秒到 120 秒，跑了 550 米；

从 120 秒到 300 秒，跑了 810 米（因为 $a=-\frac{1}{180}\mathrm{m/s}$，$S=\frac{4^2-5^2}{2a}=810$ 米）；

从 300 秒到 540 秒跑了 960 米；

从 540 秒到 600 秒跑了 270 米（因为 $a=\frac{1}{60}\ \mathrm{m/s}$，$S=\frac{5^2-4^2}{2a}=270$ 米）；

前面共跑了 2 615 米，距 2 800 还有 185 米，跑这 185 米需时 37 秒，所以 $x_1=637$；

跑最后 200 米需时$\frac{400}{13}$秒（因为 $a=\frac{8^2-5^2}{2\times200}=\frac{39}{400}\ \mathrm{m/s}$，$t=\frac{8-5}{a}=\frac{400}{13}$秒）.

按照上边的要求，跑完 3000 米所用时间为 $x_2=637+\frac{400}{13}\approx668$ 秒.

（3）速度关于时间的函数为 $y(x)=\begin{cases}0.5x, & 0\leqslant x\leqslant10, \\ 5, & 10<x\leqslant120, \\ 5-\frac{1}{180}(x-120), & 120<x\leqslant300, \\ 4, & 300<x\leqslant540, \\ 4+\frac{1}{60}(x-540), & 540<x<600, \\ 5, & 600\leqslant x\leqslant637, \\ 5+\frac{39}{400}(x-637), & 637<x\leqslant637+\frac{400}{13}.\end{cases}$

Ⅲ 自我检测题

一、选择题（每小题只有一个正确选项）：

1. 方程 $x^2-px+6=0$ 的解集为 M，方程 $x^2+6x-q=0$ 的解集为 N，且 $M\cap N=\{2\}$，那么 $p+q=($　　$)$.

(A) 21　　(B) 8　　(C) 6　　(D) 7

2. 下列四组函数中，表示相等函数的一组是（　　）.

(A) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$　　(B) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

(C) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$　　(D) $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$，$g(x)=\sqrt{x^2-1}$

3. 下列四个函数中，在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是（　　）.

(A) $f(x)=3-x$　　(B) $f(x)=x^2-3x$

(C) $f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$　　(D) $f(x)=-|x|$

4. $f(x)$ 是定义在 $[-6, 6]$ 上的偶函数，且 $f(3)>f(1)$，则下列各式一定成立的（　　）.

(A) $f(0)<f(6)$　　(B) $f(3)>f(2)$　　(C) $f(-1)<f(3)$　　(D) $f(2)>f(0)$

5. $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上递减，则 a 的取值范围是（　　）.

(A) $[-3, +\infty)$　　(B) $(-\infty, -3]$　　(C) $(-\infty, 5]$　　(D) $[3, +\infty)$

6. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$A(0, -1)$，$B(3, 1)$ 是其图象上的两点，那么 $|f(x+1)|<1$ 的解集的补集是（　　）.

(A) $(-1, 2)$　　(B) $(1, 4)$

(C) $(-\infty, -1)\cup[4, +\infty)$　　(D) $(-\infty, -1]\cup[2, +\infty)$

二、填空题：

7. 设 $A=\{x|x^2+3x-10<0\}$，$B=\{x||x+3|<3\}$，则 $A\cap B=$________.

8. 函数 $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$ 的定义域为________.

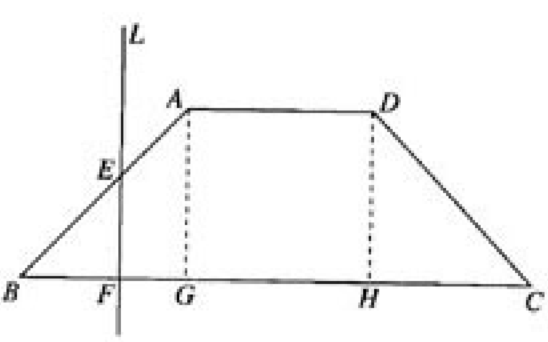
9. 已知 $f(x)$ 是偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x(x+1)$，则当 $x>0$ 时，$f(x)=$________.

10. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0,\\ -2x, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(x)=10$，则 $x=$________.

三、解答题：

11. 求函数 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$，$x\in[3, 5]$ 的最小值和最大值.

12. 如图，已知底角为 45° 的等腰梯形 $ABCD$，底边 BC 长为 7 cm，腰长为 $2\sqrt{2}$ cm，当一条垂直于底边 BC（垂足为 F）的直线 L 从左至右移动，（与梯形 $ABCD$ 有公共点）时，直线 L 把梯形分成两部分，令 $BF=x$，试写出



（第 12 题）

左边部分的面积 y 与 x 的函数解析式，并画出大致图象.

参考答案

一、选择题：

1. A；　2. A；　3. C；　4. C；　5. B；　6. D.

二、填空题：

7. $\{x \mid -5<x<0\}$；　8. $\{x \mid x\geqslant -1，且 x\neq 2\}$；　9. $x(x-1)$；　10. -3.

三、解答题：

11. 可证得 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$，$x\in[3，5]$是增函数，

当 $x=3$ 时，y 取最小值$\dfrac{5}{4}$；

当 $x=5$ 时，y 取最大值$\dfrac{3}{2}$.

12. 过点 A、D 分别作 $AG\perp BC$，$DH\perp BC$，垂足分别是 G、H.

因为 $ABCD$ 是等腰梯形，底角为 $45°$，$AB=2\sqrt{2}$ cm，所以

$$BG=AG=DH=HC=2 \text{ cm},$$

又 $BC=7$ cm，所以 $AD=GH=3$ cm.

(1) 当点 F 在 BG 上时，即 $x\in(0，2]$时，$y=\dfrac{1}{2}x^2$；

(2) 当点 F 在 GH 上时，即 $x\in(2，5]$时，$y=2+(x-2)\cdot 2=2x-2$；

(3) 当点 F 在 HC 上时，即 $x\in(5，7)$时，

$$y=S_{五边形ABFED}=S_{梯形ABCD}-S_{Rt\triangle CEF}=-\frac{1}{2}(x-7)^2+10.$$

所以，函数解析式为 $$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\in(0，2],\\ 2x-2, & x\in(2，5],\\ \dfrac{1}{2}(x-7)^2+10, & x\in(5，7).\end{cases}$$

Ⅳ 拓展资源

一、知识内容的拓广延伸

1. 集合论

许多数学家都认为现代数学具有四个特点，其中一个就是：集合论成为数学各分支的共同基础. 集合论在19世纪末诞生的基本原因，是数学分析基础的批判运动. 在18世纪，由于无穷集的概念没有精确的定义，微积分理论遇到严重的逻辑困难. 长期以来，人们对有穷（有限）集合的概念并不陌

生，并由此得出集合的许多性质．例如，通过一一对应比较集合的大小，得出“整体大于部分”这一欧几里得公理．而对元素数目为无穷的集合，一般不予考虑．这是因为许多数学家发现在无穷集间使用一一对应的比较手段，会出现部分等于全体的矛盾．但随着数学的发展，数学证明中不可避免地要用到无穷集合，特别是在分析的基础——实数的研究中，所有定义实数的方法都要用到无穷集合．这样一来，对无穷集合的研究势在必行．

康托尔（Cantor，M. B．1829—1920）

1874 年，康托尔在《克莱尔杂志》发表了题为《关于全体实代数数集合的一个性质》的文章，其中证明了所有实代数数的集合是可数的，这篇文章标志着集合论的诞生．1879 年到 1884 年，康托尔相继发表了六篇文章，前四篇直接建立了集合论的一些重要结果，包括集合论在函数论等方面的应用，1883 年康托尔将第五篇以《集合论基础》为题作为专著单独出版，它的出版是康托尔数学研究的里程碑，是康托尔关于早期集合理论的系统阐述，也是他将作出具有深远影响的特殊贡献的开端，主要成果是引进了超限数．1895 年和 1897 年，康托尔先后发表了两篇对超限数理论具有决定意义的论文，到此为止，康托尔关于超限基数和超限序数理论已趋于完成．

此时（1895 年），康托尔也发现不加限制地谈论“集合中的集合”会导致矛盾．罗素于 1903 年出版的《数学的原理》中给出的一个悖论十分清楚地表现出集合论的矛盾，从而动摇了整个数学的基础，导致了第三次数学危机．然而罗素悖论的影响不仅局限在数学领域，只要用逻辑术语代替集合论中的术语，它就可以推广到逻辑领域．这样，罗素悖论就涉及到了一向被认为极为严谨的两门科学——数学和逻辑学．集合论中悖论的存在明确地表示某些地方出了毛病．由于 20 世纪的数学是建立在集合论基础上的，许多数学家致力于消除悖论．在 20 世纪初，大致有两种办法，一种办法是罗素的分支类型论．还有一种办法是把集合论建立在公理化的基础上，对集合加以充分限制以排除所知道的矛盾，由此产生了公理集合论．

第一次进行这样尝试的是德国数学家策梅洛在 1908 年做出的，以后还有很多人进行加工．策梅洛采取希尔伯特的公理化方法回避悖论，他把集合论变成一个完全抽象的公理化理论．在这样一个公理化理论中，集合这个概念一直不加定义，而它的性质就由公理反映出来，他引进了七条公理：决定性公理（外延公理），初等集合公理，分离公理组，幂集合公理，并集合公理，选择公理，无穷公理．实际上策梅洛的公理系统是把集合限制得使之不要太大，即不只简单地将集合看成一些集团或集体，它是满足 7 条公理条件的对象，这样就排除了一些不适当的集合，从而消除了罗素悖论产生的条件．策梅洛的公理系统经过其他人特别是弗兰克尔的修正补充，成为现代标准的“策梅洛－弗拉克尔公理系统（简称 ZF 系统）”．

在高中阶段学习的集合只是一般描述性的朴素说法，集合是数学概念中的原始概念之一，不能用别的概念加以定义，只能用一组公理去刻画．

集合的运算：并与和、交、差与余．关于这些运算，有一些运算法则，如对于集合的并与交，有：交换律、结合律、分配律等；关于集合的差和余，有德·摩根公式等．

集合的基数：集合中元素的“个数”．比较两个集合中元素个数的方法就是一一对应，如果两个集合之间可以建立一一对应，就称这两个集合有相同的基数，或称它们等势．由此可知，对于无限集来说，“整体大于部分”这一欧几里得公理不成立了．这表明了无限集本质上有异于有限集合的特性——无限集合可以和它的真子集建立一一对应（如希尔伯特旅馆问题）．

不过，无穷之间也是有差别的．无限集合中最简单同时也是最常见的一类集合就是可数集合（凡是能和正整数集建立一一对应的集合），例如有理数集．这类集合在无限集合中处于什么地位呢？任何无限集合都至少包含一个可数子集，即可数集是所有无限集中基数最小的集合．关于可数集还有许多

性质，在高等数学教科书中均可查到．当然，无限集不止可数集合这一类，例如（0，1）区间作为实数集的一个无限子集，它的基数就大于可数集合的基数，这类集合称为连续统基数的集合．集合论中的定理“设M是任意一个非空集合，它的所有子集作为新的集合μ，则μ的基数大于M的基数”告诉我们，无限集合的不同基数也有无限之多．

2. 函数

函数概念的发展：一般划分为变量说、对应说与关系说这三个阶段．

变量说体现了函数中变量之间的依赖关系，但“随着变化”这种描述仍然是模糊的，例如，还可以进一步问“如何随着变化的、依赖的含义是什么”等问题，所以，对于函数的认识需要继续向前推进．

对应说抓住了函数的本质属性，即两个变量取值间的对应关系．集合论产生后，建立了函数的“集合对应定义”，抽象集合的元素代替了“变量”，使函数的概念适用于各种研究对象，应用范围大大扩大．但这个定义中还存在意义不明确的概念“对应”．什么是对应，是否完全可以用集合论的语言描述函数概念?

20世纪60年代后，人们给出了函数的“关系（序偶）定义”：

有序对的集合叫做关系，即从集合A到集合B的关系R是笛卡尔积$A\times B$的子集，且称A为$\mathbf{R}$的定义域，B为$\mathbf{R}$的值域．

从集合A到集合B的函数f，是从A到B的一个关系，满足：

（1）A、B分别为f的定义域、值域；

（2）若$(a, b)\in f$，且$(a, c)\in f$，则$b=c$．

可以看到，这个函数定义就完全建立在集合论基础上了，它可以更概括地表述函数的一般理论．不过对于中学生而言，它太抽象了．所以，在高中阶段，一般采用函数的“集合对应定义”．

函数的运算：函数的四则运算，函数的复合．

函数的四则运算：设A，$B\subset R$，且$A\cap B\neq\varnothing$，有两个函数f：$A\to R$，g：$B\to R$，函数f与g的和$f+g$，差$f-g$，积$f\cdot g$，商$\dfrac{f}{g}$分别定义为：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in A\cap B;$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\ x\in A\cap B;$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ x\in A\cap B;$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ x\in A\cap B-\{x\mid g(x)=0\}.$$

函数的复合：设有函数f：$A\to B$，g：$B\to C$，函数$(g\cdot f)$：$A\to C$称为函数f与函数g（按此顺序）从A到C的复合函数．

函数的运算是构造新函数的一种重要的方法．在这里，可以提及一下运算．运算贯穿于中学数学的全过程，而且导致了代数结构思想的形成．代数结构是数学结构中的母结构之一，另两种结构是序结构和拓扑结构．从集合论的观点来看，运算是一种映射．

设集合A、B、C，把一个从$A\times B\to C$的映射叫做$A\times B$到C的一个代数运算或二元运算．

例如，实数的加、减、乘是$\mathbf{R}$上的代数运算，除法是$\mathbf{R}\times m(M=\mathbf{R}/0)$到$\mathbf{R}$的代数运算．

初等函数的基本性质：有界性，单调性，奇偶性，周期性．

有界性：设$f(x)$是定义在数集D上的函数，如果存在数$M>0$，使得对于任意的$x\in D$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，那么称函数$f(x)$在数集D上有界．关于有界函数的一些定理可以参阅大学数学教科书．

关于奇偶性的一些结论：

若 $f(x)$ 既是偶函数又是奇函数，则函数必为 $f(x)=0$，$x\in M$，M 为任意关于原点对称的区间或点集.

任意定义域关于原点对称的函数均可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

周期性：设 $f(x)$ 是定义在数集 A 上的函数. 若存在常数 $T(\neq 0)$，具有性质：

(1) 对于任意的 $x\in A$，$x\pm T\in A$；

(2) 对于任意的 $x\in A$，有 $f(x\pm T)=f(x)$.

则称 $f(x)$ 为数集 A 上的周期函数，常数 T 叫做 $f(x)$ 的一个周期.

3. 映射

映射可以说是函数概念的推广，但这种推广是带有本质性的，它不仅从实数域推广到具有更一般的数学结构的集合上，而且对应关系也推广到更一般的情形，从而拓广了研究的对象. 它是现代数学中一个基本概念，贯穿于现代数学各分支. 如代数学主要是研究具有代数结构集合之间的映射，如同态、同构、群、环、体等，而实变函数论主要是研究具有勒贝格测度的集合间的映射，如可测函数等.

设给定两个集合 X 和 Y，集 $A\subseteq X$，对于 A 中每一个点，按照某一对应法则 T，存在 Y 中唯一确定的元 $y=Tx$ 与之对应，则称 T 是 $A\subset X$ 到 Y 的一个映射.

如果 $T(X)=Y$，称 T 为满射；如果由 $T(x)=T(x')$ 能推出 $x=x'$，称 T 为单射；如果映射 T 既是单射又是满射的，则称 T 为一一映射.

映射是否为满射是有其重要意义的，如果映射 T 是满射的，则对于每一个 $y\in Y$，至少存在一个原象 $x\in X$，使得 $y=Tx$，若把 $y=Tx$ 看作是映射方程，当 T 是满射时，方程 $y=Tx$ 至少存在一个解. 这样满射 T 解决了方程 $y=Tx$ 的解的存在性问题. 同样，当映射 T 是双射时，为映射方程 $y=Tx$ 解的存在性与唯一性提供了理论依据. 不仅如此，还为解的稳定性提供了依据. 对于微分方程来说，解的存在性与唯一性固然重要，但解的稳定性也有其实际背景，因此产生了微分方程的稳定性理论. 对于映射来说，如果映射 T 的逆映射存在并连续，则相应的映射方程 $y=Tx$ 的解具有稳定性.

二、相关知识简介

臭氧：又名“三氧”，因有鱼腥臭味而得名，分子式为 O_3，是氧气的同素异形体. 在距离地球表面 15～25 公里的高空，因受太阳紫外线照射的缘故，形成了包围在地球外围空间的臭氧层，这厚厚的臭氧层正是人类赖以生存的保护伞. 它吸收大部分来自太阳的有害的紫外线，这对所有生物都是非常重要的. 因为更多的紫外线意味着将造成更多的黑瘤和非黑瘤皮肤癌，免疫系统能力的下降，农作物产量的下降，海洋生态系统的破坏等等.

科学家对破坏臭氧层的关注始于 1970 年. 研究表明，CFCs 在大气中分裂并释放出破坏臭氧层的氯原子，哈龙物质释放出来的溴原子也对臭氧层造成同样的破坏. 关于南极“臭氧洞”的成因目前尚无定论，其中最为令人信服的是污染物质学说.

如何保护臭氧层，最方便有效的方法就是尽快停止生产和使用氯氟烃和哈龙. 1985 年 8 月，美国、前苏联、日本、加拿大等 20 多个国家签署了《保护臭氧层国际公约》，并且目前有 30 多个国家批准了该公约的《关于臭氧层物质的蒙特利尔协议书》. 该协议书规定签字国在本世纪末把氯氟烃使用量减少到 1986 年的一半. 欧洲共同体 12 国已同意本世纪末完全停止使用氯氟烃. 第三世界国家对停止生产和使用氯氟烃仍持冷淡态度，人类对臭氧层的保护还将是一项十分艰巨的任务.

恩格尔系数：19 世纪德国统计学家恩格尔根据统计资料，对消费结构的变化得出一个规律：一个家庭收入越少，家庭收入中用来购买食物的支出所占的比例就越大；随着家庭收入的增加，家庭收入

中用来购买食物的支出会下降.

按照恩格尔的理论，一个国家越穷，每个国民的平均收入中用于购买食物的支出所占比例就越大；随着国家的富裕，这个比例呈下降趋势．恩格尔系数是表示生活水平高低的一个指示．计算方法是：食物支出金额除以总支出金额，等于恩格尔系数．依据这个系数，联合国提出了一个划分贫困与富裕的标准，即恩格尔系数在60%以上者为绝对贫困，50%～59%为温饱，40%～50%为小康，30%～40%为富裕，30%以下为最富裕.

参考书目

1.《现代数学概观》，人民教育出版社，2003.7.
2. 李文林：《数学史教程》，高等教育出版社，2000.8.
3. 钱珮玲，邵光华：《数学思想方法与中学数学》，北京师范大学出版社，1999.7.
4. 高夯：《高观点下的中学数学 分析学》，高等教育出版社，2001.3.

第二章
基本初等函数(Ⅰ)

Ⅰ 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

通过本章学习，使学生了解指数函数、对数函数的实际背景，理解指数函数、对数函数的概念与基本性质，了解五种幂函数，体会建立和研究一个函数的基本过程和方法，同时会运用它们解决一些实际问题.

2. 学习目标

（1）了解指数函数模型的实际背景.

（2）理解有理指数幂的含义，通过具体实例了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算.

（3）理解指数函数的概念和意义，能借助计算器或计算机画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点.

（4）在解决简单实际问题的过程中，体会指数函数是一类重要的函数模型.

（5）理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；通过阅读材料，了解对数的发现历史以及其对简化运算的作用.

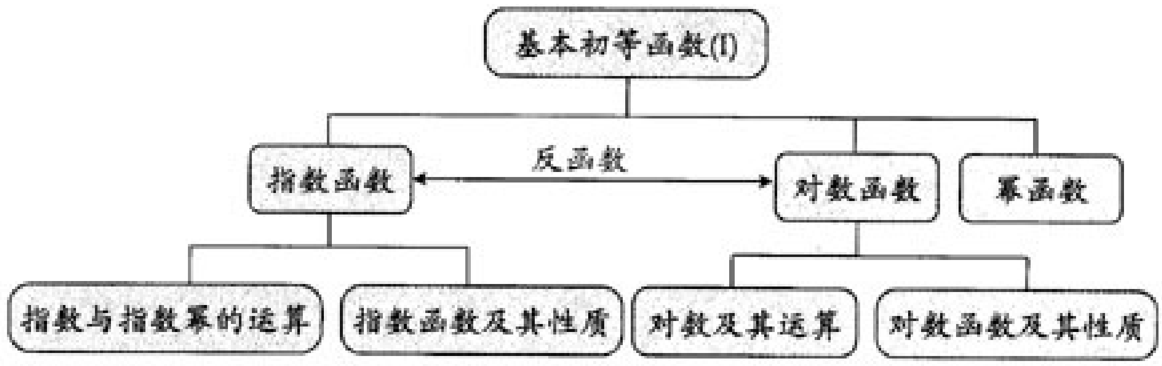
（6）通过具体实例，直观了解对数函数模型所刻画的数量关系，初步理解对数函数的概念，体会对数函数是一类重要的函数模型；能借助计算器或计算机画出具体对数函数的图象，探索并了解对数函数的单调性与特殊点.

（7）知道指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数（$a>0$，且 $a\neq1$）.

（8）通过实例，了解幂函数的概念；结合函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$ 的图象，了解它们的变化情况.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分3节：2.1 指数函数，2.2 对数函数，2.3 幂函数.

（1）学生在初中学习了数的开平方、开立方以及二次根式的概念，又学习了正整数指数幂、零指数幂、负整数指数幂的概念，以及整数指数幂的运算法则．有了这些知识作准备，教科书通过实际问题引入分数指数幂，说明了扩张指数范围的必要性，为此先将平方根与立方根的概念扩充到 n 次方根，将二次根式的概念扩充到一般根式的概念，然后进一步介绍了分数指数幂及其运算性质，最后结合一个实例，通过有理指数幂逼近无理指数幂的方法介绍了无理指数幂的意义，从而将指数的取值范围扩充到了实数.

（2）指数函数是高中新引进的第一个基本初等函数，因此，教科书先给出了指数函数的实际背景，然后对指数函数概念的建立、指数函数图象的绘制、指数函数的基本性质的发现与指数函数的初步应用，作了完整的介绍．指数函数是本章的重点内容之一.

（3）教科书从具体问题引进对数概念．从对数概念的建立过程可以看出，教科书强调“对数源于指数”（这与历史上对数的发明先于指数不同），以及指数运算与对数运算的互逆关系，这有利于学生学习时发现与论证对数的运算性质．与传统教科书一个较明显的区别是，这里加强了对数的实际应用与数学文化背景.

（4）对数函数同指数函数一样，是以对数概念和运算法则作为基础展开的．对数函数的研究过程也同指数函数的研究过程一样，目的是让学生对建立和研究一个具体函数的方法有较完整的认识．对数函数是本章的另一个重点内容.

（5）在学习了指数函数与对数函数后，以两个底数相同的指数函数与对数函数介绍了反函数．对一般的反函数概念，教科书根据《普通高中数学课程标准（实验）》的要求没有作更多的介绍，这也是与传统教科书有区别的地方.

（6）幂函数是实际问题中常见的一类函数，这里只要求通过幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$ 的图象归纳出这五个幂函数的基本性质.

三、课时分配

本章教学时间约需14课时，具体分配如下（仅供参考）：

2.1 指数函数	约6课时
2.2 对数函数	约6课时
2.3 幂函数	约1课时
小结	约1课时

Ⅱ 教科书分析

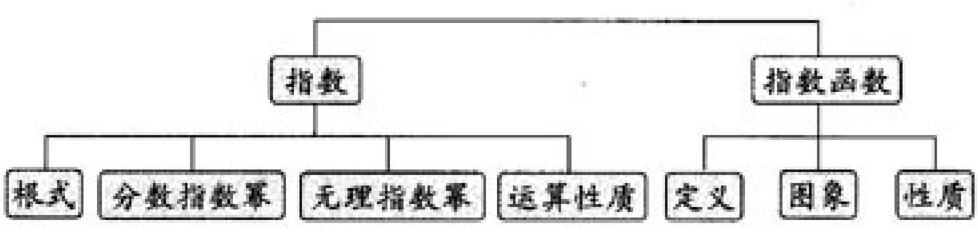
本章章头图的主图是海底游弋的鱼，配图是一块鱼化石．通过图中话，引发学生的思考，激发求知欲．在活的生物体内，碳14的含量保持不变；当生物体死亡后，体内碳14的含量随着时间的变化按一定的规律衰减，这种规律就是本章将要学习的指数函数．在实际应用中，往往是先通过技术测出死亡生物体内碳14的含量，然后据此推算生物死亡的大致时间，从而实现考古的目的．对此，我们可以利用对数及对数函数来实现．同时，基于时间的连续性及死亡生物体内碳14含量变化的连续性，说明了引进分数指数幂和无理指数幂的必要性，并且为指数函数的图象是连续不断的曲线提供了现实背景．

章引言不仅指出了章头图所蕴含的数学模型，并且还列举了这些数学模型的其他背景实例，从而指出本章学习的基本内容为三个基本初等函数（指数函数、对数函数和幂函数）及其基本性质，以及运用它们解决一些实际问题．

章头图与章引言还说明了数学模型与实际问题之间的关系——任何数学模型都是以大量的具体例子为现实原型的．因此，教学时要充分注意从实际例子中观察、抽象概括并建立数学模型，同时，又要注意把数学模型应用到实际问题中去．

2.1 指数函数

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的重点是指数函数的概念和图象．

在将指数幂运算性质的适用范围从整数集推广到实数集的过程中，可能遇到的困难是对非整数指

数幂意义的了解，特别是对无理数指数幂意义的了解.

三、编写意图与教学建议

为了让学生在学习之初就感受到指数函数的实际背景，教科书先给出了两个实际例子：GDP 的增长问题，碳 14 的衰减问题．前一个问题，既让学生回顾了初中已学的整数指数幂，也让学生体会到其中的函数模型，并且还有思想教育价值；后一个问题，让学生体会其中的函数模型的同时，激发学生探究分数指数幂、无理数指数幂的兴趣与欲望，为新知识的学习作了铺垫.

本节安排的内容蕴含了许多重要的数学思想方法，如推广的思想（指数幂运算律的推广），逼近的思想（有理指数幂逼近无理指数幂），数形结合的思想（用指数函数的图象探究指数函数的性质）等．同时，编写时充分关注与实际问题的联系，体现数学的应用价值．建议教学时重视通过具体的、实际的问题来体现数学思想方法及价值.

根据本节内容的特点，教学过程中要注意发挥信息技术的力量，尽量利用计算器或计算机等创设教学情境，为学生的数学探究与数学思维提供支持.

2.1.1 指数与指数幂的运算

1. 问题提出.

教科书从问题 2 中得到 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6\,000}{5\,730}}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,000}{5\,730}}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100\,000}{5\,730}}$，…它们分别表示生物死亡了6 000年，10 000年，100 000，…年后体内碳 14 的含量．那么，它们的含义到底是什么呢？这正是需要学习的．教学时可让学生由此体会引进分数指数幂的必要性.

2. 根式教学分析.

根式的概念是教学的一个难点，但它是后续学习所必需的.

(1) 以具体例子为载体，如 $2^4=16$、$3^5=243$，类比平方根、立方根的定义，给出 n 次方根的定义“如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n **次方根**，其中 $n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$”．教学时，可以在给出定义前，让学生类比平方根、立方根举些例子.

(2) 在将平方根和立方根的性质推广到 n 次方根的性质时，除了教科书上的例子，建议再为学生提供一些实例，经过比较获得结论：

与立方根的情况一样，奇次方根有下列性质：在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数.

与平方根的情况一样，偶次方根有下列性质：在实数范围内，正数的偶次方根是两个绝对值相等、符号相反的数；负数的偶次方根没有意义.

教学时，要让学生充分体会“当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个，这两个数互为相反数”，这时学生最容易犯错误.

(3) 对结论“零的任何次方根都是零”，要启发学生用 n 次方根的定义去理解，即：因为 $0^n=0$（$n\in\mathbf{N}^*$），所以零的任何次方根都是零，即奇次方根、偶次方根都是零.

(4) 根式的概念源于方根的概念，根据 n 次方根的意义就能得到常用的等式

$$(\sqrt[n]{a})^n=a\ (n>1，且\ n\in\mathbf{N}^*)，$$

但“$\sqrt[n]{a^n}=a$ 是否对任意的正整数 n 都成立”是不能由 n 次方根的意义直接得出的．因此，教科书为学生安排了一个“探究”活动．在具体教学过程中，可以让学生多从具体实例中自己探究、归纳出以下

结论：

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

3. 分数指数幂的教学分析.

分数指数幂的教学要解决三个问题：规定分数指数幂的意义；学会根式与分数指数幂之间的相互转化；了解分数指数幂的运算性质.

(1) 规定分数指数幂的意义前，建议首先引导学生简单地回顾初中学习过的整数指数幂的概念和性质. 例如，在复习中，可以让学生回忆乘方的意义：

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

同样，让学生通过复习负整数指数幂的意义 $a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$ 指出：零的负整数次幂也没有意义. 事实上，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$（p 为正整数），因为 $\dfrac{1}{a^p}$ 是分式，分母不能是零，所以，限定底数 $a\neq 0$.

对于整数指数幂，指数的运算性质可归纳成三条，即

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\ (m,\ n\in\mathbf{Z}),$$
$$(a^m)^n=a^{mn}\ (m,\ n\in\mathbf{Z}),$$
$$(ab)^n=a^nb^n\ (n\in\mathbf{Z}).$$

这里，底数应有使等号两边都有意义的限定，即对于零指数幂或负整数指数幂，底数不等于零，指数可以是任意整数.

然后，教科书根据 n 次方根的定义，先规定了正分数指数幂的意义，即

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n>1),$$

教学中要让学生反复理解正分数指数幂的意义，它不表示相同因式的乘积，而是根式的一种新的写法. 可以通过一些具体的根式与分数指数幂的互化，巩固、加深对概念的理解.

由于学过负整数指数幂，引入正分数指数幂后，学生不难理解负分数指数幂的意义，教学中，可以引导学生自己得出

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ (a>0,\ m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n>1).$$

教科书在定义了负分数指数幂后，补充规定“零的正分数指数幂是零，零的负分数指数幂没有意义”，这样就建立了分数指数幂的概念，并使指数的范围从整数推广到了有理数.

(2) 整数指数幂的运算性质，对于分数指数幂也同样适用. 为此教科书给出了如下运算性质：

$$a^ra^s=a^{r+s}\ (a>0,\ r,\ s\in\mathbf{Q}),$$
$$(a^r)^s=a^{rs}\ (a>0,\ r,\ s\in\mathbf{Q}),$$
$$(ab)^r=a^rb^r\ (a>0,\ b>0,\ r\in\mathbf{Q}).$$

需要学生注意的是括号中限制条件的变化. 当指数从整数指数推广到了有理数指数后，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 以及指数的运算性质中均增加了限制条件“$a>0$”或“$a>0$，$b>0$”，这可以通过让学生指出类似下列变形中的错误，从反面来加以认识：

$$-2=\sqrt[3]{-8}=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2.$$

教学中，建议让学生用自己的语言叙述指数运算的这三条性质. 如 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 表示同底的两个幂相乘，底数不变，指数相加.

（3）在有了分数指数幂的意义后，教科书对利用碳 14 测定生物死亡时间的问题进行了回顾．教学时，还可以让学生通过计算器算出生物死亡 10 000 年、100 000 年后体内碳 14 的含量 P 的值，这对于学生加深理解分数指数幂是有帮助的．

4. 无理指数幂的教学分析．

要学习指数函数，必须解决无理数指数幂的问题．教科书通过“用有理数逼近无理数”的思想引进无理数指数幂．像分数指数幂一样，教科书中研究的无理数指数幂 a^{α}（α 是无理数）的底数 a 也是正数．

（1）在教学中，要引导学生认真观察教科书中的表格，感受用有理数指数幂逼近无理数指数幂的过程，通过“过剩近似值”与“不足近似值”两个方向的逼近，认识到 $5^{\sqrt{2}}$ 是一个确定的实数．

（2）对教科书第 62 页的“思考”，建议让学生利用计算器，仿照教科书中用有理数指数幂逼近 $5^{\sqrt{2}}$ 的过程进行实际操作，使学生在自主活动中了解无理数指数幂的意义．

（3）在获得了无理数指数幂的意义后，教科书指出了有理数指数幂的运算性质在无理数范围内也是成立的．对这些运算性质，不需花太多的时间去解释为什么，只需让学生了解并会用即可．

5. 例题教学分析．

例 1 是方根与根式性质的具体运用．相对而言，要多注意类似于 $\sqrt[3]{(3-\pi)^3}$、$\sqrt{(a-b)^2}$（$a>b$）的化简．对 $\sqrt{(a-b)^2}$（$a>b$），还可以去掉条件 $a>b$ 让学生进行思考．

例 2 至例 5 是分数指数幂的运算问题，教学时可与练习中相应问题结合起来．

例 2、例 3 是属于巩固分数指数幂概念的题目，教学时不宜将例 3 这类题目扩充或提高难度，因为这里引进分数指数幂，不是为了进行根式的运算，只是为了熟悉和掌握分数指数幂概念，所以有关根式的性质的变形运算及繁琐的根式化简等都不必多练．

例 4 的教学要严格按照例题的解题步骤进行，以使学生建立分数指数运算的基本规范．例 4(1) 可以仿照单项式乘除法进行，首先是系数相乘除，然后是同底数幂相乘除，并且要注意符号．例 4(2) 中按积的乘方计算，再按幂的乘方计算，待熟练后可简化计算步骤．

例 5 是利用分数指数幂来进行根式运算，其顺序是先把根式化为分数指数幂，再根据幂的运算性质进行计算．

2.1.2 指数函数及其性质

本小节内容是在实数指数幂及其运算性质等知识基础上，进一步学习指数函数的概念、图象和性质，及初步应用．

1. 指数函数概念的引入．

教科书通过比较本节开始时的问题 1 与问题 2 引入指数函数，以利于学生体会指数函数的概念来自实践．教学时，要让学生体会其中隐含的函数关系，可引导学生通过“探究”得出以下表格．

问　题	对应关系	定义域
问题 1	$y=1.073^x$	$x\in\mathbf{N}^*$，$x\leqslant 20$
问题 2	$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$	$t\geqslant 0$

观察上述表格，学生不容易得出两个函数的共性．因此，教师要做适当的引导，特别是对问题 2 中的指数幂，只有在用 a 表示 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ 后，学生才能感受到两个问题中的指数幂具有的共性：可以写为 a^x 的形式．因此，尽管两个问题中函数的定义域不同，但对应关系都具有 $y=a^x$ 的形式．所以，我们把“函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）叫做指数函数，其中 x 是自变量，定义域是 $\mathbf{R}$”．

在教学指数函数的定义时，可以让学生根据分数指数幂的概念与运算性质思考为什么“规定 $a>0$，且 $a\neq1$”，例如，在 $(-3)^x$ 中，指数 x 取 $\frac{1}{2}$ 就没有意义．

2. 观察图象概括指数函数性质．

（1）函数图象是研究函数性质的直观工具．教科书建议列表描点绘图或利用信息技术绘图．如果列表描点绘图，建议在教科书给出的两个指数函数 $y=2^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象的基础上，再引导学生绘制几个指数函数图象，以便为概括指数函数的性质作准备．如果利用信息技术，建议让学生亲自操作，通过改变底数 a 的值获得多个指数函数的图象．

教科书第 65 页的“思考”意在让学生获得“函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象与函数 $y=2^x$ 的图象关于 y 轴对称”的结论，由此体会到可以用已知函数的图象及对称性来作新函数的图象．这样做，可以引导学生用联系的观点看问题，通过逻辑推理获得数学结论．

（2）利用指数函数的图象获取指数函数的性质是本小节的重点．利用函数的图象便于学生发现、概括、记忆函数的性质．在学习指数函数性质时，建议尽可能地引导学生通过观察图象，自己归纳概括．

3. 信息技术的使用．

在传统的教学中，由于技术条件的限制，通常是在教师（或教科书）的要求下，学生用“描点法”（甚至只有教师用“描点法”在黑板上画图，而学生并不动手）作出有限的几个特殊函数的图象，然后就让学生观察这几个图象来讨论指数函数 $y=a^x$ 的性质．在这样的教学过程中，学生对于为什么要画这几个函数的图象，为什么有限的几个函数图象就可以代表一般的函数的图象，为什么要把底数 a 分为 $0<a<1$ 和 $a>1$ 这样两类等等，都是不得而知的．为了使学生能够主动研究指数函数的图象和性质，教师可以充分利用信息技术提供的互动环境，先引导学生随意地取 a 的值（不一定是 2、3 等简单数），并在同一个平面直角坐标系内画出它们的图象，然后再通过底数 a 的连续动态变化展示函数图象的分布情况，这样就会使学生比较容易地概括出函数性质．例如，

（1）结合教科书给出的“探究”活动，让学生利用计算器或计算机作出指数函数图象（图 2-1）：

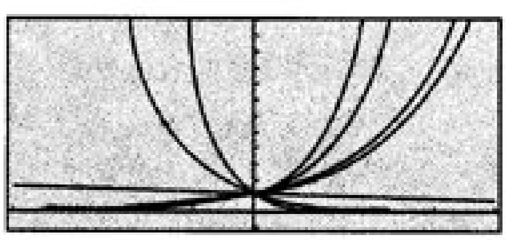


图 2-1

（2）引导学生观察图象，填写下表、讨论交流、概括总结出指数函数的基本性质．

图象特征	函数性质
① 这些图象都位于 x 轴上方.	① x 取任何实数值时，都有 $a^x>0$.
② 这些图象都经过（0，1）点.	② 无论 a 为任何正数，总有 $a^0=1$.
③ 图象可以分为两类：一类图象在第一象限内纵坐标都大于1，在第二象限内的纵坐标都小于1；另一类图象正好相反.	③ 当 $a>1$ 时，$\begin{cases}若\ x>0，则\ a^x>1，\\ 若\ x<0，则\ a^x<1；\end{cases}$ 当 $0<a<1$ 时，$\begin{cases}若\ x>0，则\ a^x<1，\\ 若\ x<0，则\ a^x>1.\end{cases}$
④ 自左向右看，$a>1$ 时图象逐渐上升；$0<a<1$ 时图象逐渐下降.	④ 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数； 当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数.

4. 例题和习题教学分析.

例6不仅可以使学生再次熟悉函数值的记号，而且还可以让学生学习用待定系数法求底数 a 的值.

例7的主要目的是应用指数函数的单调性“比较两个数的大小”，熟悉指数函数的性质．教学时也可以让学生采用不同的方法解决这个问题，例如直接用计算器计算．但应用函数单调性判断大小关系的意义在于使学生形成用函数观点解决问题的意识.

例8可以让学生自己动手填写下列表格.

年　份	经过年数	人口数（亿）
1999	0	13
2000	1	$13(1+1\%)$
2001	2	$13(1+1\%)^2$
2002	3	$13(1+1\%)^3$
…	…	…
$1999+x$	x	$13(1+1\%)^x$

由上述表格，可以方便地得到经过 x 年后，我国的人口数为

$$y=13(1+1\%)^x.$$

通过例8的教学，不仅要让学生初步体会指数增长，还要导出以下常用的指数增长模型：

设原有总量为 N，平均增长率为 p，则对于时间 x 的总量 y 可以用 $y=N(1+p)^x$ 表示．我们把形如 $y=ka^x$（$k\in\mathbf{R}$，$a>0$，且 $a\neq1$）的函数称为指数型函数.

结合例8给出第68页的“探究”，目的是让学生体会指数增长，初步感受“指数爆炸”的含义，另外还可以对学生进行思想教育．对于“探究（2）”，利用计算器可得到下列表格：

x	y1	y2			
21.	2020.	16.021			
26.	2025.	16.838			
31.	2030.	17.697			
36.	2035.	18.6			
41.	2040.	19.549			
46.	2045.	20.546			
51.	2050.	21.594			
56.	2055.	22.696			
x=21.					

x	y1	y2			
61.	2060.	23.853			
66.	2065.	25.07			
71.	2070.	26.349			
76.	2075.	27.693			
81.	2080.	29.105			
86.	2085.	30.59			
91.	2090.	32.151			
96.	2095.	33.791			
x=61.					

x	y1	y2			
101.	2100.	35.514			
106.	2105.	37.326			
111.	2110.	39.23			
116.	2115.	41.231			
121.	2120.	43.334			
126.	2125.	45.545			
131.	2130.	47.868			
136.	2135.	50.31			
x=101.					

第 68 页练习的第 1 题，可结合绘制指数函数的图象课堂完成；第 2 题可结合探究指数函数的性质完成；第 3 题可结合例 8 完成.

四、教学设计案例

指数函数及其性质（第 1 课时）

1. 教学任务分析

（1）使学生了解指数函数模型的实际背景，认识数学与现实生活及其他学科的联系.

（2）理解指数函数的概念和意义，能画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性和特殊点.

（3）在学习的过程中体会研究具体函数及其性质的过程和方法，如具体到一般的过程、数形结合的方法等.

2. 教学重点与难点

重点：指数函数的概念和性质.

难点：用数形结合的方法从具体到一般地探索、概括指数函数的性质.

3. 教学基本流程

从指数函数的实际背景，引入课题

↓

构建指数函数的概念

↓

画指数函数的图象

↓

探索指数函数的性质

↓

课堂小结与作业

4. 教学情境设计

问　　题	设计意图	师生活动
（1）在本节的问题2中时间 t 和碳14含量 P 的对应关系 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ 和问题1中时间 x 与GDP值 y 的对应关系 $y=1.073^x$（$x\in \mathbf{N}^*$，$x\leqslant 20$）能否构成函数？	用函数的观点来分析碳14含量模型和GDP值增长模型中变量之间的对应关系，为引出指数函数的概念做准备．	教师组织学生思考、分小组讨论所提出的问题，注意引导学生从函数的定义出发来解释两个问题中变量之间的关系． 学生独立思考、小组讨论，推举代表解释这两个问题中变量间的关系为什么构成函数．
（2）这两个函数有什么共同特征？	提炼出指数函数模型 $y=a^x$．	教师提出问题，注意引导学生把对应关系概括到 $y=a^x$ 的形式，注意提示 a 的取值范围． 学生思考，归纳概括共同特征．
（3）给出指数函数的定义．		
（4）你能根据指数函数的定义解决课本第68页的练习2，3吗？	利用指数函数的定义求指数型函数的定义域和写出指数函数模型的函数解析式．	生：独立思考，尝试解决课本练习2、3，并且小组讨论、交流； 师：课堂巡视，个别辅导，针对学生的共同问题集中解决．
（5）你能类比前面讨论函数性质时的思路，提出研究指数函数性质的方法吗？	给出研究指数函数性质的思路．	教师引导学生回顾需要研究函数的哪些性质，讨论研究指数函数性质的方法，强调数形结合，强调函数图象在研究性质中的作用，注意从具体到一般的思想方法的应用，渗透概括能力的培养． 学生独立思考，提出研究指数函数性质的基本思路．
（6）如何画指数函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象？	会用描点法画这两个函数的图象．	生：独立画图，同学间交流； 师：课堂巡视，个别辅导，展示画得较好的部分学生的图象．
（7）从画出的图象中你能发现函数 $y=2^x$ 的图象和函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象有什么关系？可否利用 $y=2^x$ 的图象画出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象？	总结出两个指数函数图象关于 y 轴对称时其解析式的特点，并利用轴对称性画指数函数的图象．	师：投影展示课本表2-1、2.2-2以及图2.1-2，2.1-3； 生：观察图象及表格，表述自己的发现； 师生：概括出根据对称性画指数函数图象的方法．

续表

问　　题	设计意图	师生活动
（8）你能利用指数函数的图象归纳出指数函数的性质吗？	得出指数函数性质.	教师引导学生选取若干个不同的底数 a（$a>0$，且 $a\neq1$）画出 $y=a^x$ 的图象，并指导学生观察图象，概括指数函数性质. 学生通过选取不同的底数 a（$a>0$，且 $a\neq1$）画出 $y=a^x$ 的图象，观察图象、得出性质、相互交流等活动，形成对指数函数性质的认识.
（9）根据例 6，你能说出确定一个指数函数需要几个条件吗？	明确底数 a 是确定指数函数的要素.	师：投影出例 6（题目见教科书）并引导学生分析，当函数图象过某点时，该点的坐标满足该函数解析式，即当 $x=3$ 时，$y=\pi$. 生：思考，叙述解决例 6 的步骤和过程.
（10）通过本节课的学习，你对指数函数有什么认识？教科书是怎样研究指数函数的？	对本节课的知识进行归纳概括.	生：思考、小组讨论，推举代表叙述，其他同学补充； 师：根据学生回答的情况进行评价和补充.
（11）课后作业：习题 2.1 A 组第 5、6 题.		

5. 几点说明

（1）在画函数图象时，有条件的学校可以让学生利用计算器或计算机来画．这样既可以节约时间，又可以增强学生的学习兴趣．

（2）在让学生举例时，有条件的学校可以利用《几何画板》等软件，通过改变底数 a 的值得到一系列指数函数的图象，具体操作如图 2-2 所示.

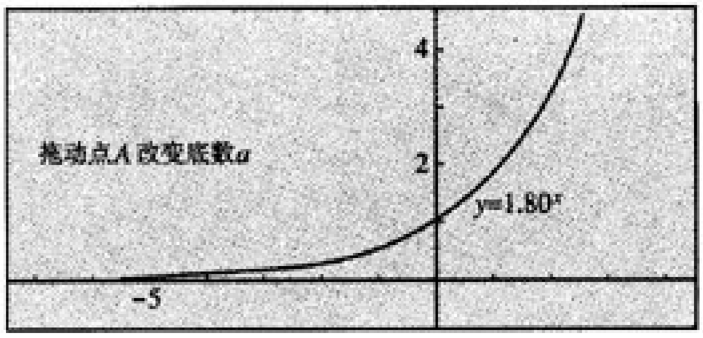


图 2-2

另外，在选取不同的底数 a 时，要注意底数 a 的代表性，既要有 $a>1$，又要有 $0<a<1$ 的情况，在讨论指数函数的性质时，要引导学生按 $a>1$ 和 $0<a<1$ 进行归类.

（3）分类有助于帮助学生处理大量繁杂的事物，从而有条理地思维．因此，在让学生观察指数函数图象并总结指数函数的单调性和特殊点时，建议引导学生按不同的底数进行适当的分类.

五、习题解答

练习（第 63 页）

1. $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$；　$a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$；　$a^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$；　$a^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

2. (1) $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$；　(2) $\sqrt[4]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{4}}$；

(3) $\sqrt[3]{(m-n)^2}=(m-n)^{\frac{2}{3}}$；　(4) $\sqrt{(m-n)^4}=(m-n)^2$；

(5) $\sqrt{p^6q^5}=p^3q^{\frac{5}{2}}$；　(6) $\dfrac{m^3}{\sqrt{m}}=m^{3-\frac{1}{2}}=m^{\frac{5}{2}}$.

3. (1) $\left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{3}{2}}=\left[\left(\frac{6}{7}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{6}{7}\right)^3=\frac{216}{343}$；

(2) $2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}=2\times3^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\times(3\times2^2)^{\frac{1}{6}}=2^{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2\times3=6$；

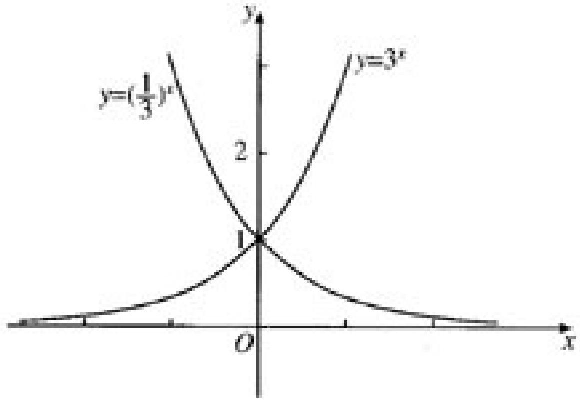
(3) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=a^{\frac{5}{8}}$；

(4) $2x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)=x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}-4x^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}=1-\frac{4}{x}$.

4. (1) 1.3346； (2) 0.0737； (3) 0.9330； (4) 0.0885.

练习（第68页）

1.



（第1题）

2. (1) $\{x \mid x\geqslant2\}$； (2) $\{x \mid x\neq0\}$.

3. $y=2^x\ (x\in\mathbf{N}^*)$.

习题2.1（第69页）

A组

1. (1) 100； (2) -0.1； (3) $4-\pi$； (4) $x-y$.

2. (1) 1； (2) $a^{\frac{1}{2}}$； (3) 1.

3. (1) 1.710 0； (2) 2.881 0； (3) 4.728 8； (4) 8.825 0.

4. (1) $a^{\frac{5}{3}}$； (2) $a^{\frac{7}{12}}$； (3) $\frac{x^4}{y^9}$； (4) $-6a$；

(5) $\frac{125t^9r^6}{64s^3}$； (6) $24y$； (7) $4x-9y^{-\frac{1}{2}}$； (8) $2x\sqrt[3]{y}$.

5. (1) $\mathbf{R}$； (2) $\mathbf{R}$； (3) $\mathbf{R}$； (4) $\{x \mid x\neq0\}$.

6. 产量 y 随经过年数 x 变化的函数解析式为

$$y=a(1+p\%)^x,\ 0\leqslant x\leqslant m.$$

7. (1) $3^{0.8}>3^{0.7}$； (2) $0.75^{-0.1}>0.75^{0.1}$；

(3) $1.01^{2.7}<1.01^{3.5}$； (4) $0.99^{3.3}>0.99^{4.5}$.

8. (1) $m<n$； (2) $m>n$； (3) $m>n$； (4) $m>n$.

9. (1) 死亡生物组织内碳14的剩余量 P 与时间 t 的函数解析式为

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}.$$

当时间经过九个“半衰期”后，死亡生物组织内的碳14的含量为

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9\times5\,730}{5\,730}}=\left(\frac{1}{2}\right)^9\approx0.002.$$

答：当时间经过九个“半衰期”后，死亡生物组织内的碳14的含量约为死亡前含量的2‰，所以，还能用一般的放射性探测器测到碳14的存在.

(2) 设大约经过 t 万年后，用一般的放射性探测器测不到碳 14，那么

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,000t}{5\,730}}<0.001,$$

解得

$$t>5.7.$$

答：大约经过 6 万年后，用一般的放射性探测器是测不到碳 14 的.

10. 已知本金为 a 元.

1 期后的本利和为 $y_1=a+a\times r=a(1+r)$，

2 期后的本利和为 $y_2=a(1+r)+a(1+r)r=a(1+r)^2$，

3 期后的本利和为 $y_3=a(1+r)^3$，

……

x 期后的本利和为 $y=a(1+r)^x$.

将 $a=1\,000$（元），$r=2.25\%$，$x=5$ 代入上式得

$$\begin{aligned}y&=1\,000\times(1+2.25\%)^5\\&=1\,000\times1.022\,5^5\\&\approx1\,118.\end{aligned}$$

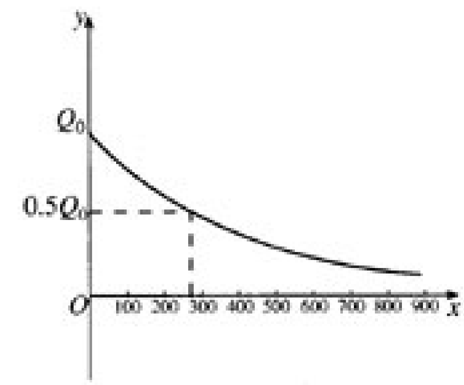
答：本利和 y 随存期 x 变化的函数式为 $y=a(1+r)^x$，5 期后的本利和约为 1 118 元.

11. (1) 当 $t=100$ 时，有

$$\begin{aligned}y&=Q_0\mathrm{e}^{-0.002\,5t}\\&=Q_0\mathrm{e}^{-0.002\,5\times100}\\&\approx0.779Q_0.\end{aligned}$$

答：100 年后，臭氧含量约为初始量的 77.9%.

(2) 首先利用计算器或计算机作出函数 $y=Q_0\mathrm{e}^{-0.002\,5t}$ 的图象.



（第 11 题）

由图象可知，随时间 t 的增加，臭氧 Q 的含量在不断地减少.

事实上，因为 $\mathrm{e}^{-0.002\,5}<1$，所以函数 $f(t)=(\mathrm{e}^{-0.002\,5})^t=\mathrm{e}^{-0.002\,5t}$ 是减函数.

所以随时间 t 的增加，臭氧 $Q=Q_0\mathrm{e}^{-0.002\,5t}$ 的含量在不断地减少.

答：随着时间的增加，臭氧的含量不断地减少.

12. (1) $x=-\frac{1}{5}$； (2) $x>-\frac{1}{5}$ $(a>1)$，$x<-\frac{1}{5}$ $(0<a<1)$.

B 组

1. 对于 $a^{2x-7}>a^{4x-1}$，

当 $a>1$ 时，有

$$2x-7>4x-1,$$

解得

$$x<-3;$$

当 $0<a<1$ 时，有

$$2x-7<4x-1,$$

解得

$$x>-3.$$

所以，当 $a>1$ 时，x 的取值范围为 $\{x|x<-3\}$；当 $0<a<1$ 时，x 的取值范围为 $\{x|x>-3\}$.

2. (1) 设 $y=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，那么

$$\begin{aligned}y^2&=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2\\&=x+x^{-1}+2.\end{aligned}$$

由于 $x+x^{-1}=3$，所以 $y=\sqrt{5}$.

（2）设 $y=x^2+x^{-2}$，那么

$$y=(x+x^{-1})^2-2.$$

由于 $x+x^{-1}=3$，所以 $y=7$.

（3）设 $y=x^2-x^{-2}$，那么

$$y=(x+x^{-1})(x-x^{-1}).$$

而 $(x-x^{-1})^2=x^2-2+x^{-2}=5$，所以 $y=\pm3\sqrt{5}$.

（4）设 $y=x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$，那么

$$\begin{aligned}y&=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x+1+x^{-1})\\&=\pm\sqrt{x-2+x^{-1}}\ (x+1+x^{-1})\\&=\pm4.\end{aligned}$$

3. 由图可知指数函数 $y=(\frac{b}{a})^x$ 是减函数，所以

$$0<\frac{b}{a}<1,$$

而二次函数 $y=ax^2+bx$ 的顶点的横坐标为 $-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}$，所以

$$-\frac{1}{2}<-\frac{b}{2a}<0,$$

即二次函数 $y=ax^2+bx$ 的顶点的横坐标的取值范围是 $(-\frac{1}{2},0)$.

4.（1）a. 当时间 $t=0$ 时，

$$y=5e^{-0.2\times0}=5.$$

答：y 的初始值是 5 毫克；

b. 当 $t=10$ 时，

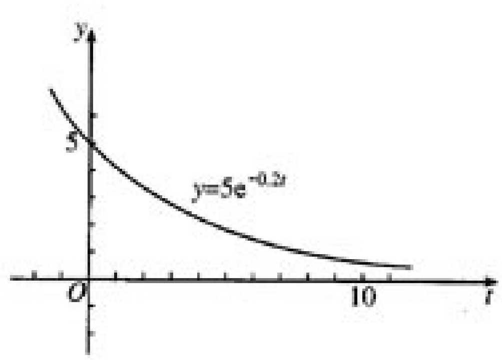
$$y=5e^{-0.2\times10}=5e^{-2}=\frac{5}{e^2}\approx0.68,$$

答：当 $t=10$ 时，y 的值约是 0.68 毫克；

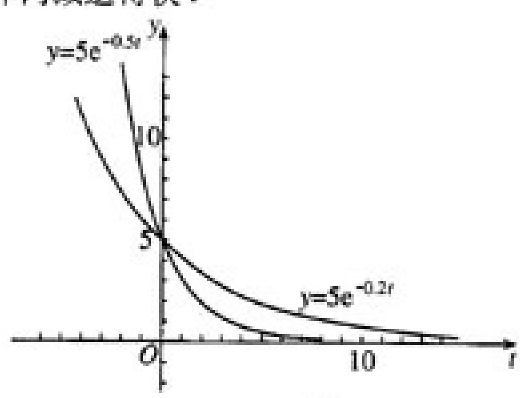
c. 函数图象如下所示．

（2）在同一平面直角坐标系内画出 $y=5e^{-0.2t}$ 和 $y=5e^{-0.5t}$ 的图象．

根据图象可知在相同时间内另一种药品比药品 S 在身体内减退得快．



（1）

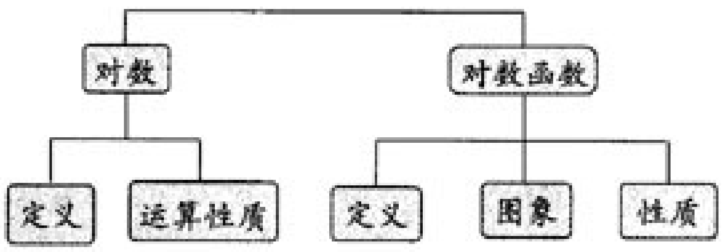


（2）

（第 4 题）

2.2 对数函数

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是对数函数的概念、图象和性质.

理解对数的意义、符号，以及如何从对数函数的图象归纳出对数函数的性质，是教学时可能遇到的难点.

三、编写意图与教学建议

本节内容是在学习了指数函数后，通过具体实例了解对数函数模型的实际背景，学习对数概念，进而学习一类新的基本初等函数——对数函数．由于对数与指数的对应关系，对数函数与指数函数有着很多对应的性质，这在教科书编写中得到了反映，同时也是教学中应引导学生充分重视的问题.

本节内容蕴含了许多重要的数学思想方法，如归纳的思想（见例 6），数形结合的思想（见用对数函数的图象探究对数函数的性质），类比的思想（如从指数的运算律类比对数的运算律）等．同时，编写时以人口、考古、地震、pH 的测定等问题，充分体现了数学的应用价值．因此，教学时重视以具体、实际的问题体现数学的思想方法及价值.

根据本节内容的特点，教学过程中要注意发挥信息技术的作用，尽量使用计算器或计算机，为学生的数学探究与数学思维提供支持．如使用计算器或计算机作对数函数的图象、讨论对数函数的性质等.

2.2.1 对数与对数运算

本小节包括对数的定义、对数式与指数式互化、对数的运算性质及对数的初步应用.

1. 对数教学分析.

（1）第 72 页“思考”的目的是让学生从人口问题中感受到对数的现实背景，并引出对数的概念．在这里，可以利用计算器或计算机画出函数 $y=13\times1.01^x$ 的图象（图 2-3）.

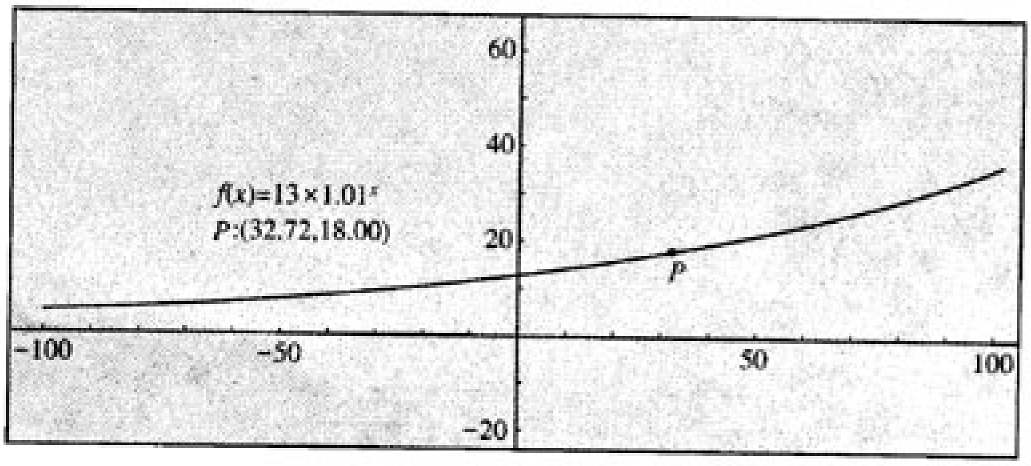


图 2-3

在所作的图象上取点 P，测出点 P 的坐标，移动点 P，使其纵坐标分别接近 18、20、30，观察这时的横坐标，大约分别为 32.72、43.29、84.04，这就是说，如果保持年均增长率为 1 个百分点，那么大约经过 33 年、43 年、84 年，我国人口分别约为 18 亿、20 亿、30 亿.

（2）在给出对数的概念后，建议让学生就具体的对数进行表述，特别是将人口问题中的时间用对数来表示：

$$x=\log_{1.01}\frac{18}{13},\ x=\log_{1.01}\frac{20}{13},\ x=\log_{1.01}\frac{30}{13}.$$

（3）对常用对数 $\lg N$ 和自然对数 $\ln N$，只要让学生掌握这两个对数的定义和它们的符号即可（可以说明一下为什么要给它们一个特别的名称）. 为了让学生熟悉这两种特殊的对数，可以让学生用计算器计算几个底数为 10 和底数为 e 的对数的值，并用这两种特殊对数的记号来表示计算器得到的结果，例如，

$$\lg2=0.301\,0,\ \lg3=0.477\,1,\ \ln2=0.6931,\ \ln3=1.098\,6.$$

（4）由对数的定义，可以得到对数与指数间的关系

$$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N\ (a>0,\ 且\ a\neq1).$$

教学时，建议引导学生利用这个关系式和已学习的指数幂的相关知识解决如下问题：

① 说明为何在对数 $\log_a N$ 中规定 $a>0$，且 $a\neq1$.

② 填写下表中空白处的名称.

	式子	名称		
		a	b	N
指数式	$a^b=N$	底数		
对数式	$\log_a N=b$	底数		

要让学生认清对数式 $\log_a N=b$ 的含义：明确 a、N、b 相对于指数式 $a^b=N$ 是什么数，并找出它们之间的关系；其次要掌握各数的名称和式子的读法.

③ 说明为什么**负数和零没有对数.**

在 $\log_a N=b$ 中，必须 $N>0$，这是由于在实数范围内，正数的任何次幂都是正数．因而 $a^b=N$ 中 N 总是正数．教学中，也可以用计算器计算真数为负数的情况，计算器会提示出错信息，以加深对**“负数和零没有对数”**这一结论的印象.

④ 推导 $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$（$a>0$，且 $a\neq1$）.

2. 对数运算性质教学分析.

（1）对数的运算性质是进行对数计算的重要依据，是本小节的重点之一．教科书的思路是根据指数与对数的关系及指数运算性质，推出对数运算的性质：

如果 $a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

① $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$；

② $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$；

③ $\log_aM^n=n\log_aM$（$n\in\mathbf{R}$）.

教科书给出了①的推导过程，这是一个纯粹的数学推理过程．另两条运算性质可以让学生自己推导，以进一步理解对数与指数间的关系.

性质②的推导如下：

设
$$\log_aM=p,\ \log_aN=q,$$
设 $M=a^p$，$N=a^q$，于是
$$\frac{M}{N}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q},$$
由对数的定义得到
$$\log_a\frac{M}{N}=p-q,$$
即
$$\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN.$$

性质③的推导如下：

设 $M=a^m$，于是
$$M^n=a^{mn},$$
由对数的定义有
$$\log_aM^n=mn=n\log_aM.$$

（2）教学时，要注意将指数与对数的运算性质进行对照加以复习和巩固，如可以引导学生归纳总结出下表.

指数与对数对比表

式　子	$a^b=N$	$\log_aN=b$
名称	a——幂的底数 b——幂的指数 N——幂值	a——对数的底 b——以 a 为底的 N 的对数 N——真数
运算性质	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $(a^m)^n=a^{mn}$	$\log_aMN=\log_aM+\log_aN$ $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$ $\log_aM^p=p\log_aM$

（3）对数的换底公式是进行对数运算的重要基础，这里只要求学生知道换底公式并利用它将对数转化为常用对数或自然对数来计算，因此教科书把换底公式的证明作为学生的“探究”活动．证明换底公式的方法很多，下面给出一种参考证法：

设 $\log_ab=p$，因为
$$\log_ab=\frac{\log_cb}{\log_ca}\Leftrightarrow p\log_ca=\log_cb\Leftrightarrow\log_ca^p=\log_cb\Leftrightarrow a^p=b,$$

又 $a^p=b$ 成立，所以

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\ (a>0，且\ a\neq1；c>0，且\ c\neq1；b>0).$$

学生了解换底公式后，第一个应用就是解决引入对数概念时人口问题中的设问．教科书只给出了约经过 33 年人口达到 18 亿，教学时可让学生解决其他几个问题，并以此印证引入对数概念时用指数函数图象所获得的认识.

3. 例题教学分析.

例 1 和例 2 的目的是让学生通过实例进一步熟悉对数式与指数式的互化，以及加深对式中各字母意义的理解．教学时，可让学生课堂完成随后配备的练习.

例 3 和例 4 的目的是让学生熟悉对数的运算性质，了解简单对数的计算及对数式的化简．教学时，可让学生结合例 3 与例 4 的学习在课堂完成配备的练习.

例 5 与例 6 均是对数的应用问题．教学时，要注意帮助学生理解题意，弄清各字母的含义，以及它们在对数式中的具体名称及计算方法.

4. “阅读与思考”的安排建议.

教科书所提供的“阅读与思考”，可以增加学生对对数的了解，并加强数学文化的熏陶．如果有条件，教学时除要求学生完成阅读外，还可让学生去图书馆或上网查阅更多的资料，进行交流，并安排适当的环节检查学生完成的情况.

2.2.2　对数函数及其性质

本小节的任务是在学习对数的概念与运算性质后，进一步学习对数函数的定义、图象、性质及初步应用.

1. 对数函数概念的引入.

教科书以 2.2.1 的例 6 为背景引入对数函数，以表明对数函数来源于实践．教学时，可以让学生利用计算器填写下表.

碳 14 的含量 P	0.5	0.3	0.1	0.01	0.001
生物死亡年数 t					

学生填写完毕后，引导他们观察上表，体会“对每一个碳 14 的含量 P 的取值，通过对应关系 $t=\log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}}P$，生物死亡年数 t 都有唯一的值与之对应，从而 t 是 P 的函数”．所以，我们把“函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）叫做对数函数，其中 x 是自变量，定义域是 $(0,+\infty)$”.

联系对数的学习，学生会比较自然地明白“规定 $a>0$，且 $a\neq1$”和对数函数的定义域是 $(0,+\infty)$.

2. 对数函数的图象及其性质的教学分析.

（1）对数函数的图象与性质的研究过程和方法与指数函数是一样的．所以教学时，可以类比指数函数图象和性质的研究，引导学生自己研究对数函数的性质，获得如下结论：

图象特征	函数性质
① 这些图象都位于 y 轴右方.	① x 可取任何正数值，函数值 $y\in\mathbf{R}$.
② 这些图象都经过 (1，0) 点.	② 无论 a 为任何正数，总有 $\log_a 1=0$.
③ 图象可以分为两类：一类图象在区间 (0，1) 内纵坐标都小于 0，在区间 (1，$+\infty$) 内的纵坐标都大于 0；另一类图象正好相反.	③ 当 $a>1$ 时，$\begin{cases}若 0<x<1，则 \log_a x<0，\\ 若 x>1，则 \log_a x>0；\end{cases}$ 当 $0<a<1$ 时，$\begin{cases}若 0<x<1，则 \log_a x>0，\\ 若 x>1，则 \log_a x<0.\end{cases}$
④ 自左向右看，$a>1$ 时图象逐渐上升；$0<a<1$ 时图象逐渐下降.	④ 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数.

(2) 对数函数的图象和性质是本小节的重点，也是教学的一个难点．突破难点的关键在于认识底数 a 对函数值变化的影响，而学生对研究过程的参与又是关键，所以，教学时应鼓励学生积极主动地参与获得性质的过程.

(3) 如果有条件，应当充分利用信息技术．例如，让学生随意地取 a 的值，并在同一平面直角坐标系内画出它们的图象，在他们利用工具作图的过程中，就会非常清楚地看到底数 a 是如何影响函数 $y=\log_a x$ 的.

3. 例题和习题教学分析.

例 7 的目的是使学生通过求函数的定义域加深对对数函数的理解，重点并非求函数的定义域，建议教学时不要加大这一部分的难度.

例 8 的主要目的是应用对数函数的单调性"比较两个数的大小"，熟悉对数函数的性质．类似于指数函数的处理，教学时还可以让学生采用不同的方法解决这个问题，例如直接用计算器计算．但还是应当强调应用函数单调性的目的是用函数的观点解决问题的思想方法.

例 9 的难点是让学生理解题意，把具体的实际问题化归为数学问题．教学中，还要特别启发学生用所获得的结果去解释实际现象．如本例中的"根据对数函数性质及上述 pH 的计算公式，说明溶液酸度与溶液中氢离子的浓度之间的变化关系".

本小节练习的处理：第 1 题结合绘制对数函数的图象完成，第 2 题结合例 7 完成，第 3 题结合例 8 完成.

4. 反函数教学分析.

教科书只要求学生知道同底的对数函数与指数函数互为反函数，不要求学生讨论形式化的反函数定义，也不要求学生求已知函数的反函数.

(1) 第 84 页"探究"的目的是让学生知道"按照对应关系 $x=\log_2 y$，x 是 y 的函数"，并由此说明同底的对数函数与指数函数互为反函数.

(2) 教科书从"过 y 轴正半轴上任意一点作 x 轴的平行线，与 $y=2^x$ 的图象有且只有一个交点"及"对于任意一个 $y\in(0,+\infty)$，通过式子 $x=\log_2 y$，x 在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的值和它对应"两个方面来说明"$x=\log_2 y$ ($y\in(0,+\infty)$) 是函数 $y=2^x$ ($x\in\mathbf{R}$) 的反函数"，前者可以让学生从图象上获得直观认识，后者是回到函数的定义上去，前者为后者作了铺垫.

(3) 互为反函数的对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$，$a\neq1$) 和指数函数 $y=a^x$ ($a>0$，$a\neq1$) 的图象之间的关系，教科书是以"探究与发现"的形式出现的，供有兴趣的学生学习，并不做一般要求.

5. 反思与总结.

完成指数函数、对数函数的教学后，建议引导学生回顾、对比这两类函数，对它们形成整体认识. 教学时可以让学生填写下表.

指数函数与对数函数对照表

名　　称	指数函数	对数函数
一般形式	$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）	$y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$）
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$
值域	$(0,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
函数值变化情况	当 $a>1$ 时 $\begin{cases}a^x>1, & x>0,\\ a^x=1, & x=0,\\ a^x<1, & x<0.\end{cases}$ 当 $0<a<1$ 时， $\begin{cases}a^x<1, & x>0,\\ a^x=1, & x=0,\\ a^x>1, & x<0.\end{cases}$	当 $a>1$ 时 $\begin{cases}\log_a x>0, & x>1,\\ \log_a x=0, & x=1,\\ \log_a x<0, & x>1.\end{cases}$ 当 $0<a<1$ 时， $\begin{cases}\log_a x<0, & x>1,\\ \log_a x=0, & x=1,\\ \log_a x>0, & x>1.\end{cases}$
单调性	当 $a>1$ 时，a^x 是增函数； 当 $0<a<1$ 时，a^x 是减函数.	当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数； 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数.
图象	$y=a^x$ 的图象与 $y=\log_a x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.	

四、教学设计案例

对数的概念（第1课时）

1. 教学任务分析

（1）对数概念的引入.

让学生在实际背景中认识对数概念，既是本节课的重点又是难点. 要通过适当的素材创设情境，使学生认识引进对数的必要性，从而调动学生学习对数的积极性.

根据底数、指数与幂三者的关系，从已知底和幂如何求指数的运算入手，引导学生借助指数函数的图象，分析问题中幂指数的存在性，从而引出对数概念.

（2）指数式与对数式的互化.

通过表格填写，图示连线，对指数式与对数式中各字母进行对比分析，引导学生认识对数与指数的相互联系；利用指数式与对数式互化，帮助学生理解对数概念，体会转化思想在对数计算中的作用.

（3）学习本节课要达到的目标是：理解对数的概念，能说明对数与指数的关系，掌握指数式与对数式的互化.

2. 教学重点与难点

重点：对数的概念，对数式与指数式的互化.

难点：对数概念的理解.

3. 教学基本流程

创设问题情境，引入新课

↓

给出对数定义

↓

给出自然对数与常用对数概念与符号

↓

分析指数式与对数式中 a、x、N 各自的名称与位置

↓

例题与习题处理

↓

课堂练习、小结与课后作业

4. 教学情境设计

<table>
<tr><th>问　题</th><th>问题设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr><td>（1）你能回答本小节开始提出的问题吗?</td><td>让学生认识到引入对数概念的必要性.</td><td>教师提出问题，引导学生思考由 $y=1.01^x$ 的图象可否求出当 $y=\frac{18}{13}$、$\frac{20}{13}$、$\frac{30}{13}$时，相应的 x 的值，即从 $\frac{18}{13}=1.01^x$，$\frac{20}{13}=1.01^x$，$\frac{30}{13}=1.01^x$ 中解出 x 的值，并概括出问题的实质：已知底数和幂如何求指数 x.</td></tr>
<tr><td colspan="3">（2）概括对数定义.</td></tr>
<tr><td>（3）在指数式 $a^x=N$ 与对数式 $\log_a N=x$ 中，a、x、N 的名称与位置有什么变化?</td><td>明确指数式与对数式中 a、x、N 三个量之间的同一关系，理解对数定义.</td><td>教师引导学生思考并解决下列问题，提醒学生关注两式中 a、x、N 的名称与位置的变化情况.
（1）完成下表.
<table><tr><th rowspan="2">式　子</th><th colspan="3">名　称</th></tr><tr><th>a</th><th>x</th><th>N</th></tr><tr><td>$a^x=N$</td><td></td><td>指数</td><td></td></tr><tr><td>$\log_a N=x$</td><td></td><td></td><td>真数</td></tr></table>（2）用连线表示下列两式中字母的对应关系.
$a^x=N$，
$\log_a N=x$.</td></tr>
</table>

续表

问　题	问题设计意图	师生活动
（4）是不是所有的实数都有对数呢？ $\log_a 1=?$ $\log_a a=?$	得出对数的一些常用性质.	教师可以引导学生尝试用对数表示 $2^x=-3$ 与 $2^x=0$，使学生从中感受负数与零没有对数的理由，从而理解对数与零没有对数的结论. 教师引导学生根据指数式与对数式的关系，由 $a^0=1$，$a^1=a$ 得出结论.
（5）完成第74页练习的第1、2题. 你能说说指数式与对数式互化中应注意哪些问题？	熟悉指数式与对数式的相互转化，加深理解对数概念.	教师引导学生阅读课本例1，并解决课本练习1、2. 教师要注意引导学生思考指数式与对数式相互转化的依据.
（6）你能说出例2中求 x 的基本依据是什么吗？	在应用的过程中进一步理解和掌握对数概念.	教师引导学生独立解答例2，并组织学生展示自己的解答过程，要求学生说明解答的依据，以使学生在指数式与对数式相互转化的过程中进一步理解对数的概念.
（7）你能说出第74页练习第4题蕴含了什么结论吗？	反馈学生掌握对数概念的情况，巩固所学知识.	学生独立解决第74页的练习4的（1）（3）（5）；教师组织学生对自己的解答情况进行评价.
（8）小结： ①为什么要引入对数？指数与对数有什么关系？ ②你已经知道对数的哪些性质？	对知识进行归纳概括，体会等价转化思想在对数计算中的作用.	教师引导学生自己归纳总结所学知识，可以组织学生讨论、交流.
（9）课后作业 解决下列问题： ①课本练习4的（2）（4）（6）； ②习题2.2A组：1、2.		

5. 几点说明

（1）引入对数概念时，要引导学生回顾67页例8，使学生感受到引入对数的必要性；

（2）给出对数定义后，要引导学生学习“阅读与思考”，进一步体会引入对数概念的必要性；

（3）应引导学生了解对数符号的由来，注意对数符号的书写；

（4）注意把练习与习题的处理融入知识的学习过程中；

（5）教学中应多给学生创造尝试、思考、交流、讨论、表述的机会；

（6）教学中应注重转化思想的渗透.

五、习题解答

练习（第74页）

1. （1）$3=\log_2 8$；　　（2）$5=\log_2 32$；

（3）$-1=\log_2\dfrac{1}{2}$；　　（4）$-\dfrac{1}{3}=\log_{27}\dfrac{1}{3}$.

2. (1) $9=3^2$；　　(2) $125=5^3$；

(3) $\frac{1}{4}=2^{-2}$；　　(4) $\frac{1}{81}=3^{-4}$.

3. (1) 设 $x=\log_5 25$，则 $5^x=25=5^2$，所以 $x=2$；

(2) 设 $x=\log_2 \frac{1}{16}$，则 $2^x=\frac{1}{16}=2^{-4}$，所以 $x=-4$；

(3) 设 $x=\lg 1\,000$，则 $10^x=1\,000=10^3$，所以 $x=3$；

(4) 设 $x=\lg 0.001$，则 $10^x=0.001=10^{-3}$，所以 $x=-3$.

4. (1) 1；　　(2) 0；　　(3) 2；

(4) 2；　　(5) 3；　　(6) 5.

练习（第 79 页）

1. (1) $\lg(xyz)=\lg x+\lg y+\lg z$；

(2) $\lg \frac{xy^2}{z}=\lg(xy^2)-\lg z$
$=\lg x+\lg y^2-\lg z$
$=\lg x+2\lg y-\lg z$；

(3) $\lg \frac{xy^3}{\sqrt{z}}=\lg(xy^3)-\lg\sqrt{z}$
$=\lg x+\lg y^3-\frac{1}{2}\lg z$
$=\lg x+3\lg y-\frac{1}{2}\lg z$；

(4) $\lg \frac{\sqrt{x}}{y^2 z}=\lg\sqrt{x}-\lg(y^2 z)$
$=\frac{1}{2}\lg x-\lg y^2-\lg z$
$=\frac{1}{2}\lg x-2\lg y-\lg z$.

2. (1) 7；　　(2) 4；　　(3) -5；　　(4) 0.56.

3. (1) $\log_2 6-\log_2 3=\log_2 \frac{6}{3}=\log_2 2=1$；

(2) $\lg 5-\lg 2=\lg \frac{5}{2}$；

(3) $\log_5 3+\log_5 \frac{1}{3}=\log_5 3\times\frac{1}{3}=\log_5 1=0$；

(4) $\log_3 5-\log_3 15=\log_3 \frac{5}{15}=\log_3 \frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$.

4. (1) 1；　　(2) 1；　　(3) $\frac{5}{4}$.

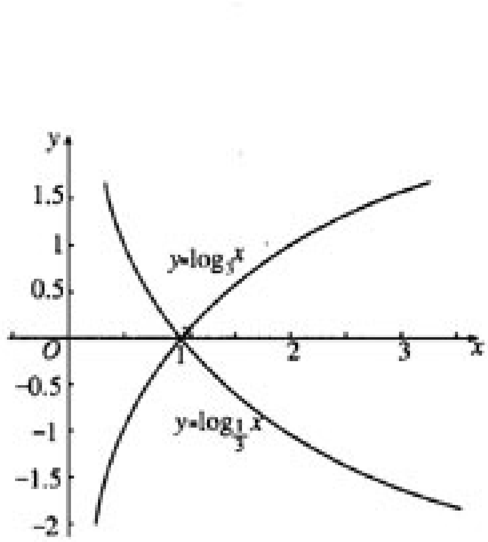
练习（第 85 页）

1. 函数 $y=\log_3 x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象如图所示.

相同点：图象都在 y 轴的右侧，都过点 (1，0).

不同点：$y=\log_3 x$ 的图象是上升的，$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象是下降的.

关系：$y=\log_3 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象关于 x 轴对称.



(第 1 题)

2. (1) $(-\infty, 1)$； (2) $(0, 1)\cup(1, +\infty)$；

(3) $(-\infty, \frac{1}{3})$； (4) $[1, +\infty)$.

3. (1) $\log_{10}6 < \log_{10}8$； (2) $\log_{0.5}6<\log_{0.5}4$；

(3) $\log_{\frac{2}{3}}0.5>\log_{\frac{2}{3}}0.6$； (4) $\log_{1.5}1.6>\log_{1.5}1.4$.

习题 2.2（第 86 页）

A 组

1. (1) $x=\log_3 1$； (2) $x=\log_4\frac{1}{6}$； (3) $x=\log_4 2$；

(4) $x=\log_2 0.5$； (5) $x=\lg 25$； (6) $x=\log_5 6$.

2. (1) $27=5^x$； (2) $7=8^x$； (3) $3=4^x$；

(4) $\frac{1}{3}=7^x$； (5) $0.3=10^x$； (6) $\sqrt{3}=e^x$.

3. (1) 0； (2) 2； (3) -2；

(4) 2； (5) -14； (6) 2.

4. (1) 原式$=\lg 2+\lg 3=0.778\ 1$；

(2) 原式$=2\lg 2=0.602\ 0$；

(3) 原式$=\lg(3\times 4)=\lg 3+2\lg 2=1.079\ 1$；

(4) 原式$=\lg 3-\lg 2=0.176\ 1$；

(5) 原式$=\frac{1}{2}\lg 3=0.238\ 6$；

(6) 原式$=5\lg 2=1.505\ 0$.

5. (1) $x=ab$； (2) $x=\frac{m}{n}$； (3) $x=\frac{n^3}{m}$； (4) $x=\frac{\sqrt{b}}{c}$.

6. 设 x 年后我国的 GDP 在 1999 年基础上翻两番，则

$$(1+0.073)^x=4,$$

解得 $x=\log_{1.073}4\approx 20$.

答：约 20 年后我国的 GDP 在 1999 年的 GDP 的基础上翻两番.

7. (1) $(0, +\infty)$； (2) $(\frac{3}{4}, 1]$.

8. (1) $m<n$； (2) $m<n$； (3) $m>n$； (4) $m>n$.

9. 若火箭的最大速度 $v=12\ 000$，那么

$$2\ 000\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)=12\ 000,$$

$$\ln(1+\frac{M}{m})=6,$$

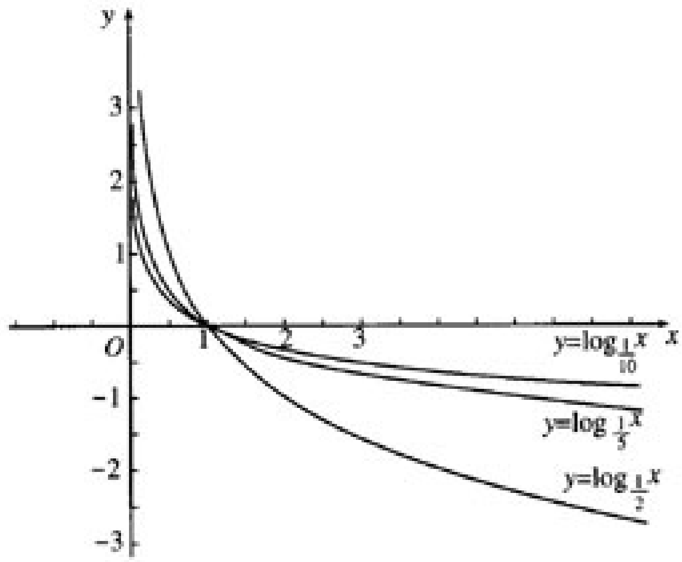
$$1+\frac{M}{m}=e^6,$$

$$\frac{M}{m}\approx 402.$$

答：当燃料质量约为火箭质量的 402 倍时，火箭的最大速度可达 12 km/s.

10. (1) 当底数全大于 1 时，在 $x=1$ 的右侧，底数越大的图象越在下方．所以，①对应函数 $y=\lg x$，②对应函数 $y=\log_5 x$，③对应函数 $y=\log_2 x$.

(2)



(第 10 题)

(3) 从上图发现，$y=\log_2 x$，$y=\log_5 x$，$y=\lg x$ 分别与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$y=\log_{\frac{1}{5}} x$，$y=\log_{\frac{1}{10}} x$ 的图象关于 x 轴对称.

11. (1) $\log_2 25\cdot\log_3 4\cdot\log_5 9=\dfrac{\lg 25}{\lg 2}\times\dfrac{\lg 4}{\lg 3}\times\dfrac{\lg 9}{\lg 5}=\dfrac{2\lg 5}{\lg 2}\times\dfrac{2\lg 2}{\lg 3}\times\dfrac{2\lg 3}{\lg 5}=8.$

(2) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\dfrac{\lg b}{\lg a}\times\dfrac{\lg c}{\lg b}\times\dfrac{\lg a}{\lg c}=1.$

12. (1) 令 $O=2\ 700$，则

$$v=\frac{1}{2}\log_3\frac{2\ 700}{100},$$

解得 $v=1.5$.

答：鲑鱼的游速为 1.5 米/秒.

(2) 令 $v=0$，则

$$\frac{1}{2}\log_3\frac{O}{100}=0,$$

解得 $O=100$.

答：一条鱼静止时的耗氧量为 100 个单位.

B 组

1. 由 $x\log_3 4=1$ 得

$$4^x=3,\ 4^{-x}=\frac{1}{3},$$

于是 $4^x+4^{-x}=\dfrac{10}{3}$.

2. 当 $a>1$ 时，$\log_a\dfrac{3}{4}<1$ 恒成立；

当 $0<a<1$ 时，由 $\log_a\dfrac{3}{4}<1=\log_a a$，得

$$a<\frac{3}{4},$$

所以 $0<a<\frac{3}{4}$.

所以，实数 a 的取值范围是 $\left\{a \mid 0<a<\frac{3}{4}\text{或 } a>1\right\}$.

3.（1）当 $I=10^{-13}\ \mathrm{W/cm^2}$ 时，

$$D=10\lg\frac{10^{-13}}{10^{-16}}=10\lg 10^{3}=30.$$

答：人低声说话的声音强度为 30 dB.

（2）当 $I=3.16\cdot 10^{-6}\ \mathrm{W/cm^2}$ 时，

$$D=10\lg\frac{3.16\times10^{-6}}{10^{-16}}=10\lg(3.16\times10^{10})\approx105.$$

答：平时常人的交流（$I=3.16\cdot10^{-6}\ \mathrm{W/cm^2}$）的声音强度约为 105 dB.

（3）当 $I=5.01\times10^{-6}\ \mathrm{W/cm^2}$ 时，

$$D=10\lg\frac{5.01\times10^{-6}}{10^{-16}}=10\lg(5.01\times10^{10})\approx107.$$

答：交响音乐会坐在铜管乐前（$I=5.01\times10^{-6}\ \mathrm{W/cm^2}$）的声音强度约为 107 dB.

图略.

4.（1）由 $x+1>0$，$1-x>0$ 得

$$-1<x<1,$$

所以，函数 $f(x)+g(x)$ 的定义域为 $(-1,\ 1)$.

（2）对任意的 $x\in(-1,\ 1)$，$-x\in(-1,\ 1)$ 有

$$f(-x)+g(-x)=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=f(x)+g(x).$$

所以，$f(x)+g(x)$ 是 $(-1,\ 1)$ 上的偶函数.

（3）当 $a>1$ 时，要使 $f(x)+g(x)<0$ 成立，则 x 应满足

$$\begin{cases}-1<x<1,\\0<(1+x)(1-x)<1,\end{cases}$$

解得 $-1<x<1$，且 $x\neq0$.

所以，当 $a>1$ 时，使 $f(x)+g(x)<0$ 成立的 x 的集合是 $\{x\mid -1<x<1,\ \text{且 } x\neq0\}$.

当 $0<a<1$ 时，要使 $f(x)+g(x)<0$ 成立，则 x 应满足

$$\begin{cases}-1<x<1,\\(1+x)(1-x)>1,\end{cases}$$

满足条件的 x 不存在.

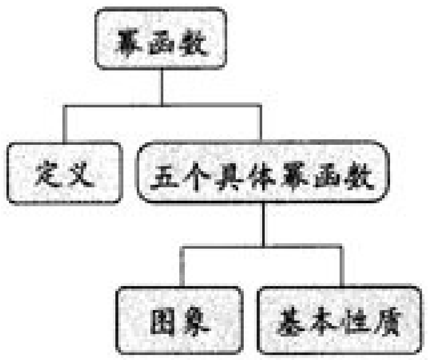
所以，当 $0<a<1$ 时，$f(x)+g(x)<0$ 成立的 x 的集合是 $\varnothing$.

5.（1）$y=\log_2 x$，$y=\log_{0.3}x$；

（2）$y=3^x$，$y=0.1^x$.

2.3 幂函数

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是从五个具体幂函数中认识幂函数的一些性质.

画五个幂函数的图象并由图象概括其性质是教学中可能遇到的困难.

三、编写意图与教学建议

教科书从实际问题得到五个常用的幂函数，从而引出幂函数的概念. 教学时只需对它们的图象与基本性质进行认识，不必在一般的幂函数上作过多的介绍.

1. 教科书首先给出五个实际问题，目的是引出五个常用的幂函数，并由此概括它们的共性，得出幂函数的定义.

2. 五个幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{-1}$中，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^{-1}$的图象是学生熟悉的. 对 $y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$ 两个幂函数，可以用描点法作出图象，也可以直接用计算器或计算机作出图象再加以认识.

五个幂函数在同一平面直角坐标系中的图象（图 2-4）可以用计算器或计算机作出.

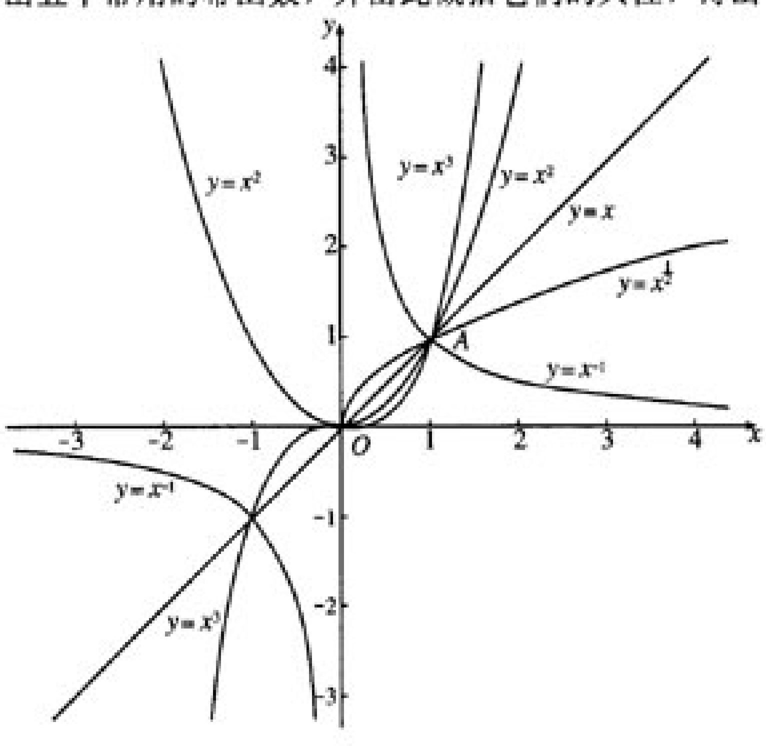


图 2-4

3. 教学中，可以让学生通过观察上述图象，自己尝试归纳五个幂函数的基本性质，然后再完成教科书中的表格.

在归纳五个幂函数的基本性质时，应注意引导学生类比前面研究一般的函数、指数函数、对数函数等过程中的思想方法，对研究这些函数的思路作出引导.

四、习题解答

习题 2.3（第 92 页）

1. 函数 $y=\frac{1}{x^2}$，$y=1$ 是幂函数.

2. 设所求幂函数的解析式为 $y=x^a$，将点（2，$\sqrt{2}$）代人解析式中得

$$\sqrt{2}=2^a,$$

解得 $a=\frac{1}{2}$.

所以，所求幂函数的解析式为 $y=x^{\frac{1}{2}}$.

3. （1）设比例系数为 k，气体的流量速率 v 与管道半径 r 的函数解析式为

$$v=kr^4;$$

（2）将 $r=3$，$v=400$ 代入上式中有

$$400=k\times3^4,$$

解得　$k=\frac{400}{81}$.

所以气体通过半径为 r cm 的管道时，其流量速率 v 的表达式为 $v=\frac{400}{81}r^4$；

（3）当 $r=5$ 时，$v=\frac{400}{81}\times5^4=\frac{250\ 000}{81}\approx3\ 086\ \text{cm}^3/\text{s}$.

所以当气体通过的管道半径为 5 cm 时，该气体的流量速率约为 3 086 cm^3/s.

复习参考题（第 94 页）解答

A 组

1. （1）11；　（2）$\frac{7}{8}$；　（3）0.001；　（4）$\frac{9}{25}$.

2. （1）$\frac{2a+2b}{a-b}$；　（2）$\frac{a^2-1}{a^2+1}$.

3. （1）$\log_a1=0$；　（2）$\log_aa=1$；　（3）$\log_aN=3$；　（4）$\log_aM=\frac{2}{3}$.

4. （1）$a^b=N$；　（2）$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$；　（3）$a^5=32$；　（4）$a^3=x+y$.

5. （1）$\frac{1-a}{2a+b}$；　（2）$\frac{ab+3}{1+ab}$.

6. （1）由题意可知 $P=21$，$B=31$，那么

$$h=\left(\frac{-100}{9}\right)\lg\frac{21}{31}\approx1.9.$$

答：飞机的高度约为一万九千米.

（2）由题意可知 $P=21$，$B=29$，那么

$$h=\left(\frac{-100}{9}\right)\lg\frac{21}{29}\approx1.6.$$

答：飞机真实的高度约为一万六千米．由此可看到，如果不及时重新设置高度计调整海平面的大气压，飞行员就有可能看到与实际情况不符的高度，这对于飞行员及时调整飞机飞行状态极为不利.

7. （1）$\left\{x\middle|x\neq\frac{1}{2}\right\}$；　（2）$[0,+\infty)$.

8. (1) $\left\{x \middle| \frac{2}{3}<x<1 \text{ 或 } x>1\right\}$； (2) $(-\infty, 2)$； (3) $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

9. (1) $\log_6 7>\log_7 6$； (2) $\log_3 \pi>\log_2 0.8$.

10. 证明：因为 $f(x)=3^x$，所以

$$f(y)=3^y,\ f(x+y)=3^{x+y},\ f(x-y)=3^{x-y},$$

所以(1) $f(x)\cdot f(y)=3^x\cdot 3^y=3^{x+y}=f(x+y)$；

(2) $f(x)\div f(y)=3^x\div 3^y=3^{x-y}=f(x-y)$.

11. 证明：因为 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，所以

$$f(a)=\lg\frac{1-a}{1+a},$$

$$f(b)=\lg\frac{1-b}{1+b},$$

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\lg\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}.$$

所以，$f(a)+f(b)=\lg\frac{1-a}{1+a}+\lg\frac{1-b}{1+b}=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}\right)=\lg\frac{1+ab-a-b}{1+ab-a+b}=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

12. (1) 设保鲜时间 y 关于储藏温度 x 的函数解析式为

$$y=ka^x,$$

由题意可知，当 $x=0$ 时，$y=192$，当 $x=22$ 时，$y=42$，于是

$$\begin{cases}192=k,\\42=ka^{22},\end{cases}$$

解得

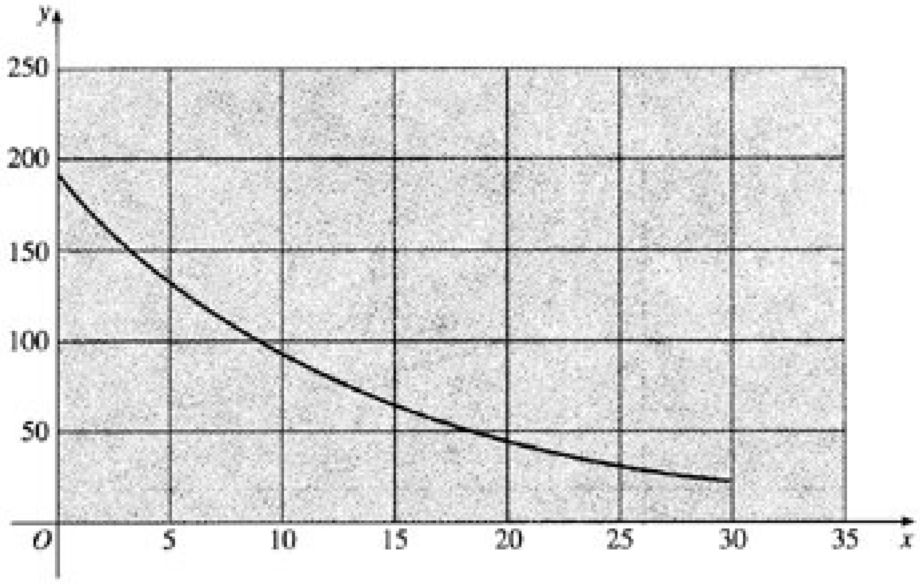
$$\begin{cases}k=192,\\a\approx 0.93.\end{cases}$$

所以，保鲜时间 y 关于储藏温度 x 的函数解析式为 $y=192\times 0.93^x$.

(2) 当 $x=30$ 时，$y\approx 22$；当 $x=16$ 时，$y\approx 60$.

答：温度在 30 ℃和 16 ℃时，牛奶的保鲜时间分别为 22 小时和 60 小时.

(3) 函数图象如图所示.

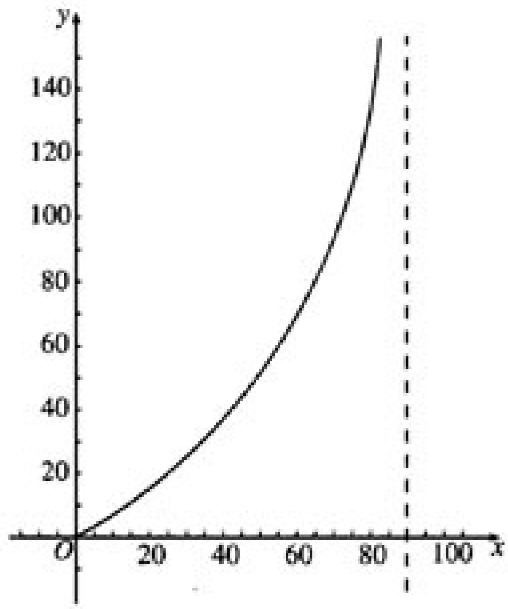


(第 12 题)

13. （1）当 $N=20$ 时，$t=-144\lg\left(1-\frac{20}{90}\right)\approx 16$；

当 $N=40$ 时，$t=-144\lg\left(1-\frac{40}{90}\right)\approx 37$.

（2）函数 $t=-144\lg\left(1-\frac{N}{90}\right)$ 为增函数，当 N 无限接近于 90 时，t 无限大；当 N 等于 0 时，t 为 0. 所以其图象大致为



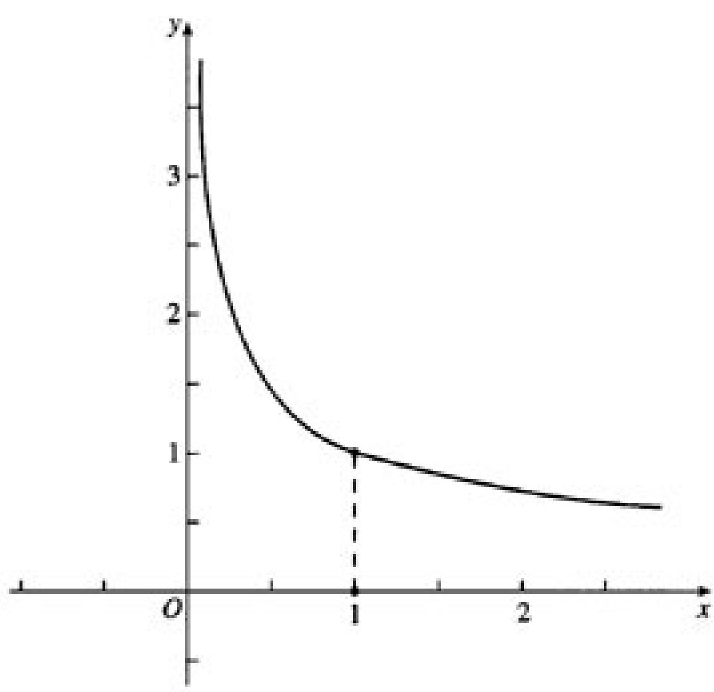
（第 13 题）

14. 依题意设 $f(x)=x^{\alpha}$，则

$$2^{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $\alpha=-\frac{1}{2}$.

所以，$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$. 其图象大致为



（第 14 题）

因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数．由图可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减.

15. 设行星轨道的半长轴为 x，由题意可知

$$T=kx^{\frac{3}{2}}.$$

当 $x=5\ 800$ 时，$T=88$，所以，$k\approx0.000\ 2$.

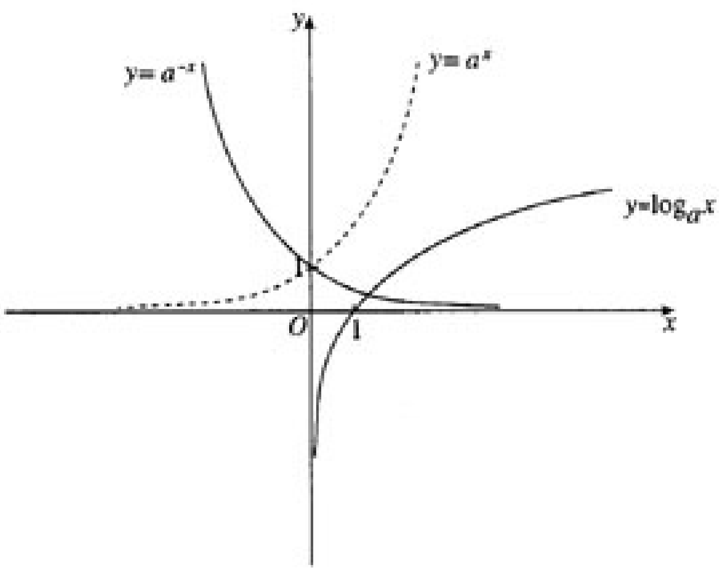
当 $x=6\times10^5$ 时，$T\approx92\ 951$；

当 $x=1.5\times10^4$ 时，$T\approx367$.

答：冥王星的运行周期约为 255 年，地球的运行周期约为 1 年.

B组

1. A.
2. 由 $a>1$ 知，$y=a^{-x}$ 为减函数，$y=\log_a x$ 为增函数，且 $y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 互为反函数，$y=a^{-x}$ 与 $y=a^x$ 的图象关于 y 轴对称．由此在同一平面直角坐标系中画出 $y=a^{-x}$ 和 $y=\log_a x$ 的图象为



（第 2 题）

3. 1.
4. (1) 证明：设 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\left(a-\frac{2}{2^{x_1}+1}\right)-\left(a-\frac{2}{2^{x_2}+1}\right)\\&=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)},\end{aligned}$$

由 $x_1<x_2$ 可知 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$，所以

$$(2^{x_1}-2^{x_2})<0,\ (2^{x_1}+1)>0,\ (2^{x_2}+1)>0.$$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以当 a 取任意实数，$f(x)$ 都为其定义域上的增函数.

(2) 由 $f(-x)=-f(x)$，得

$$a-\frac{2}{2^{-x}+1}=-a+\frac{2}{2^x+1},$$

解得 $a=1$.

5. (1) 由 $\frac{1+x}{1-x}>0$ 得

$$-1<x<1.$$

所以 $f(x)=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}$（$a>0$，$a\neq1$）的定义域是（$-1$，$1$）.

（2）由 $f(x)>0$，得

$$\log_a\frac{1+x}{1-x}>0,$$

因为 $a>1$，于是

$$\frac{1+x}{1-x}>1,$$

解得 $0<x<1$.

所以当 $a>1$ 时，使 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围是（0，1）.

6. 证明：由 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 得

$$f(2x)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2},\ g(2x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}.$$

（1）$$[g(x)]^2-[f(x)]^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=1;$$

（2）$$2f(x)\cdot g(x)=2\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=f(2x);$$

（3）$$[g(x)]^2+[f(x)]^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$$
$$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$$
$$=g(2x).$$

7. 由题意可知，$\theta_1=62$，$\theta_0=15$，当 $t=1$ 时，$\theta=52$，于是

$$52=15+(62-15)e^{-k},$$

解得 $k\approx0.24$，那么

$$\theta=15+47e^{-0.24t}.$$

所以，当 $\theta=42$ 时，$t\approx2.3$；当 $\theta=32$ 时，$t\approx4.2$.

答：开始冷却 2.3 和 4.2 小时后，物体的温度分别为 42 ℃和 32 ℃. 物体不会冷却到 12 ℃.

8.（1）由 $P=P_0e^{-kt}$ 可知，当 $t=0$ 时，$P=P_0$；当 $t=5$ 时，$P=(1-10\%)\ P_0$. 于是有

$$(1-10\%)\ P_0=P_0e^{-5k},$$

解得 $k=-\dfrac{1}{5}\ln0.9$，那么

$$P=P_0e^{(\frac{1}{5}\ln0.9)t}.$$

所以，当 $t=10$ 时，$P=P_0e^{\frac{1}{5}\times10\times\ln0.9}=P_0e^{\ln0.81}=81\%P_0$.

答：10 小时后还剩百分之八十一的污染物.

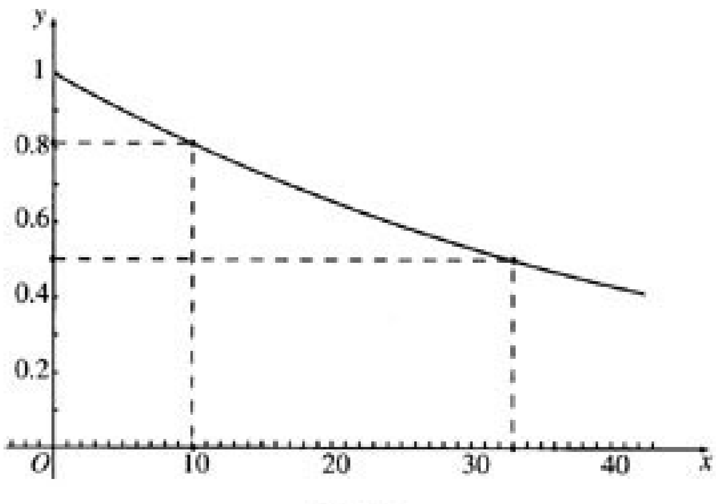
（2）当 $P=50\%P_0$ 时，有

$$50\%P_0=P_0e^{(\frac{1}{5}\ln0.9)t},$$

解得 $t=\dfrac{\ln 0.5}{\frac{1}{5}\ln 0.9}\approx 33$.

答：污染减少50%需要花大约33 h.

(3) 其图象大致如下：



(第8题)

Ⅲ 自我检测题

一、选择题（每小题只有一个正确选项）：

1. 已知集合 $A=\{y|y=\log_2 x,\ x>1\}$，$B=\{y|y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x>1\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

(A) $\{y|0<y<\frac{1}{2}\}$　　(B) $\{y|0<y<1\}$　　(C) $\{y|\frac{1}{2}<y<1\}$　　(D) $\varnothing$

2. 若 a、b 是任意实数，且 $a>b$，则（　　）.

(A) $a^2>b^2$　　(B) $\frac{b}{a}<1$　　(C) $\lg(a-b)>0$　　(D) $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

3. 如果 $a>1$，$b<-1$，那么函数 $f(x)=ax+b$ 的图象在（　　）.

(A) 第一、二、三象限　　(B) 第一、三、四象限

(C) 第二、三、四象限　　(D) 第一、二、四象限

4. 世界人口已超过56亿，若按千分之一的年增长率计算，则两年增长的人口就可相当于一个（　　）.

(A) 新加坡（270万）　　(B) 香港（560万）

(C) 瑞士（700万）　　(D) 上海（1 200万）

5. 已知 $f(x)$ 是偶函数，它在 $[0,+\infty)$ 上是减函数．若 $f(\lg x)>f(1)$，则 x 的取值范围是（　　）.

(A) $\left(\frac{1}{10},1\right)$　　(B) $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(1,+\infty)$

(C) $\left(\frac{1}{10},10\right)$　　(D) $(0,1)\cup(10,+\infty)$

二、填空题：

6. 1992 年底世界人口达到 54.8 亿，若人口的年平均增长率为 1%，经过 x 年后世界人口数为 y（亿），则 y 与 x 的函数解析式为______.

7. 函数 $y=\log_{x-1}(3-x)$ 的定义域是______.

8. 设 $0\leqslant x\leqslant 2$，则函数 $y=4^{x-\frac{1}{2}}-3\cdot 2^{x}+5$ 的最大值是______，最小值是______.

三、解答题：

9. 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$（$a>0$，且 $a\neq 1$），

（1）求 $f(x)$ 的定义域；　　（2）讨论函数 $f(x)$ 的增减性.

10. 某电器公司生产 A 型电脑．1993 年这种电脑每台平均生产成本为 5000 元，并以纯利润 20% 确定出厂价．从 1994 年开始，公司通过更新设备和加强管理，使生产成本逐年降低．到 1997 年，尽管 A 型电脑出厂价仅是 1993 年出厂价的 80%，但却实现了 50% 纯利润的高效益.

（1）求 1997 年每台 A 型电脑的生产成本；

（2）以 1993 年的生产成本为基数，求 1993 年至 1997 年生产成本平均每年降低的百分数（精确到 0.01，以下数据可供参考：$\sqrt{5}=2.236$，$\sqrt{6}=2.449$）.

参考答案：

一、选择题：

1. A；　2. D；　3. B；　4. D；　5. C.

二、填空题：

6. $y=54.8\cdot 1.1^{x}$.

7. $\{x\mid 1<x<2$ 或 $2<x<3\}$.

8. $\frac{5}{2}$，$\frac{1}{2}$.

三、解答题：

9. （1）令 $a^x-1>0$，即 $a^x>1$.

当 $a>1$ 时，$a^x>1$ 的解集是 $(0,+\infty)$；当 $0<a<1$ 时，$a^x>1$ 的解集是 $(-\infty,0)$；

所以，当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)$.

（2）当 $a>1$ 时，$y=\log_a u$ 是增函数，$u=a^x-1$ 是增函数，从而函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

同理可证：当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数.

10. （1）一方面可以根据 1993 年的出厂价求得 1997 年的出厂价；另一方面根据题意可把 1997 年的出厂价用 1997 年的生产成本表示，列出方程求解.

设 1997 年每台电脑的生产成本为 x 元，依题意，得

$$x(1+50\%)=5\,000\times(1+20\%)\times 80\%,$$

解得 $x=3\,200$（元）.

（2）因为 1993 至 1997 年四年间成本平均每年降低的百分率相等，因此可把 1997 年每台的生产成本用这个百分率来表示，而这个量应与第（1）问中求得的 1997 年每台电脑的生产成本相等，据此列出方程求解.

设 1993 年至 1997 年间每年平均生产成本降低的百分率为 y，则依题意，得

$5\,000(1-y)^4=3\,200$，解得

$y_1=1-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$y_2=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}$（舍去）.

所以，$y=1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\approx 0.11=11\%$.

答：1997 年每台电脑的生产成本为 3 200 元，1993 年至 1997 年生产成本平均每年降低 11%.

Ⅳ 拓展资源

一、知识内容的拓广延伸

1. 指数

n 个相同的因数 a 相乘，即 $a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a$ 记作 a^n，a^n 叫做 a 的 n 次幂，这时 a 叫做底数，n 叫做指数.

本来幂的指数总是正整数，后来随着数的扩充，指数的概念也不断发展.

正整数指数幂，特别是与计算面积、体积密切联系的平方和立方概念，在一些文明古国很早就有了. 我国汉代曾有人提出过负整数指数的概念，可惜未曾流传开来 . 15 世纪末，法国数学家休凯引入了零指数概念 . 17 世纪英国瓦利士在他的《无穷小算术》中提出了负指数，他写道："平方指数倒数的数列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，…的指数是 -2，立方指数倒数的数列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{27}$，…的指数是 -3，两者逐项相乘，就得到'五次幂倒数'的数列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{32}$，$\frac{1}{243}$，…它的指数显然是 $(-2)+(-3)=-5$，同样，'平方根倒数'的数列 $\frac{1}{\sqrt{1}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}$，…的指数是 $-\frac{1}{2}$，…"

这是一个巨大的进步，不过瓦利士没有真正使用指数符号 2^{-2}，2^{-3}，$2^{-\frac{1}{2}}$，只是说 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，…的指数是 -2，-3 和 $-\frac{1}{2}$，…

分数指数幂最早出现在奥力森的《比例算法》中，他使用的符号并不简洁 . 现行的分数指数和负数指数符号是牛顿创设的，他在 1676 年 6 月 13 日写信给莱布尼茨，里面说道，"因为代数学家将 aa，aaa，$aaaa$ 等写成 a^2，a^3，a^4 等等，所以我将 $\surd a$，$\surd a^3$ 写成 $a^{\frac{1}{2}}$，$a^{\frac{3}{2}}$；又将 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{aa}$，$\frac{1}{aaa}$ 写成 a^{-1}，a^{-2}，a^{-3}" . 信中的"$\surd a$"与"$\surd a^3$"，就是现在的 $\sqrt{a}$，$\sqrt{a^3}$. 而且，牛顿还首先使用了任意实数指数.

18 世纪以后，人们发现复数 $a+bi$ 还可用三角式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 及指数式 $re^{i\theta}$ 表示（r 是模，θ 是幅角），从而得到了一般复数指数的概念.

1679 年，莱布尼茨写信给荷兰数学家惠更斯讨论方程

$$x^x-x=24,\quad x^z+z^x=b,\quad x^x+z^z=c,$$

这是引入变指数的开始.

指数概念形成后，欧拉才把对数建立在指数的逆运算的基础上，这就是现行教科书采用的方法.

2. 指数函数、对数函数和幂函数

与教科书中的叙述顺序不同，这里将从对数函数的公理化定义出发，用对数函数的反函数定义指数函数，并利用对数函数的性质得到幂函数，从而在某种程度上将指数函数和幂函数统一到了对数函数上，这样使我们更清楚地看到了这三个函数间的联系.

对数函数的公理化定义：设 $f(x)$：$(0,+\infty)\to\mathbf{R}$，满足：

(1) $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数；

(2) 对于任意的 x，$y\in(0,+\infty)$，有

$$f(xy)=f(x)+f(y);$$

(3) 对于 $a>0$，且 $a\neq1$，有 $f(a)=1$.

称 $f(x)$ 是以 a 为底 x 的对数函数，记作 $f(x)=\log_a x$.

当然，可以证明满足上述定义的函数 $f(x)$ 是唯一存在的.

对于任意的实数 $a>0$，且 $a\neq1$，$f(x)=\log_a x$ 的反函数称为以 a 为底的指数函数，记作 $f(x)=a^x$（即存在唯一定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的非零连续函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，这样的函数就是指数函数），当 x 为正整数时，由于 $\log_a a^n=n$，所以 $a^n=a\cdot a\cdot a\cdots\cdot a$，这与通常的指数定义相同.

利用对数函数的性质还可以证明以下结论：

若函数 $f(x)$ 是从正实数集到自身的连续函数，且满足条件 $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$，则具有形式：

$$f(x)=x^\alpha,\text{其中 }\alpha\text{ 为实数.}$$

而这类函数就是幂函数.

虽然公理化定义可以很好地将函数的性质刻画出来，但对于给定的 x，如何计算函数值 $f(x)$ 呢？下面再来看看这些函数的其他形式，从中会获得这个问题的答案.

自然对数函数：$\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}dt$，即自然对数是双曲线 $y=\frac{1}{t}$ 下介于坐标 $t=1$ 和 $t=x$ 之间的面积（积分形式）.

对数函数 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$（级数形式）. 由此就可以求出对数的值，例如 ln1.5.

幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$ 的和函数 $E(x)$ 为指数函数.

一阶微分方程初值问题 $\begin{cases}y'(x)=ky(x),\ (k\text{ 是一常数})\\ y(0)=1\end{cases}$ 的解为指数函数，特别地当 $a=e^k$（$a>0$，且 $a\neq1$）时，其解为以 a 为底的指数函数.

二、相关知识简介

1. 澳大利亚的兔子数“爆炸”

在教科书第三章的章头图中，我们看到一大群喝水、嬉戏的兔子，但正是这群兔子曾使澳大利亚伤透了脑筋. 1859 年，有人从欧洲带进澳洲几只兔子，由于澳洲有茂盛的牧草，而且没有兔子的天敌兔子数量不断增加，不到 100 年，兔子们占领了整个澳大利亚，数量达到 75 亿只. 可爱的兔子变得可恶起来，75 亿只兔子吃掉了相当于 75 亿只羊所吃的牧草，草原的载畜率大大降低，而牛羊是澳大利亚的主要牲口. 这使澳大利亚头痛不已，他们采用各种方法消灭这些兔子，直至二十世纪五十年代，

科学家采用裁液瘤病毒杀死了百分之九十的野兔，澳大利亚人才算松了一口气.

一般而言，在理想条件（食物或养料充足，空间条件充裕，气候适宜，没有敌害等）下，种群在一定时期内的增长大致符合“J”型曲线；在有限的环境（空间有限，食物有限，有捕食者存在等）中，种群增长到一定程度（K）后不再增长，曲线呈“S”型. 从数学上来看，可以用指数函数描述一个种群的前期增长情况，用对数函数描述后期增长的情况.

2. 碳 14 测年法

利用宇宙射线产生的放射性同位素碳 14 测定含碳物质的年龄的方法，就叫碳 14 测年法. 已故著名考古学家夏鼐先生对碳 14 测定考古年代的作用，给了极高的评价：“由于碳 14 测定年代法的采用，使不同地区的各种新石器文化有了时间关系的框架，使中国的新石器考古学因为有了确切的年代序列而进入了一个新时期.”

那么，碳 14 测年法是如何测定古代遗存物的年龄呢?

原来，宇宙射线在大气中能够产生放射性碳 14，并与氧结合成二氧化碳后进入所有活组织，先为植物吸收，后为动物纳入. 只要植物或动物生存着，它们就会持续不断地吸收碳 14，在机体内保持一定的水平. 而当有机体死亡后，即会停止吸收碳 14，其组织内的碳 14 便以约 5 730 年的半衰期开始衰变并逐渐消失. 对于任何含碳物质，只要测定剩下的放射性碳 14 的含量，便可推断其年代.

碳 14 测年法分为常规碳 14 测年法和加速器质谱碳 14 测年法两种. 两者相比，后者具有明显的优点：一是样品用量少，只需 1～5 毫克样品就可以了，如一小片织物、骨屑、古陶瓷器表面或气孔中的微量碳粉都可测量（常规碳 14 测年法却需 1～5 克样品）；二是灵敏度高，其测量同位素比值的灵敏度可达 10～15 至 10～16（常规碳 14 测年法则与之相差 5～7 个数量级）；三是测量时间短，测量现代碳若要达到 1%的精度，只需 10～20 分钟（常规碳 14 测年法却需 12～20 小时）. 可以说，对测定 50 000 年以内的文物样品，加速器质谱碳 14 测年法是测定精度最高的一种.

3. 对数，延长了天文学家的生命

“给我空间、时间和对数，我可以创造一个宇宙”，这是十六世纪意大利著名学者伽利略的一段话. 从这段话可以看到，伽利略把对数与最宝贵的空间和时间相提并论.

对数的发展绝非一人之功. 首先要提到的是 16 世纪瑞士钟表匠标尔基，当他结识了天文学家开普勒，看到开普勒每天与天文数字打交道，数字之大、计算量之繁重，真的难以想像，于是便产生了简化计算的想法.

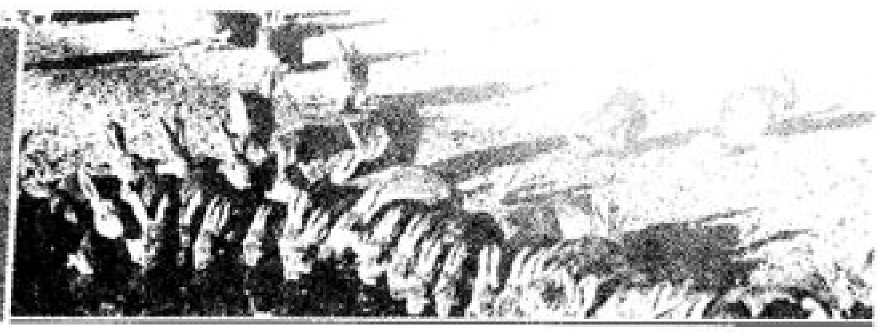
从 1603 年到 1611 年，标尔基用了八年的时间，一个数一个数地算，造出了一个对数表，这个对数表帮了开普勒的大忙. 开普勒认识到了对数表的实用价值，劝标尔基赶快把对数表出版，标尔基认为这个对数表还过于粗糙，一直没下决心出版.

正在标尔基犹豫不定的时候，1614 年 6 月在爱丁堡出版了苏格兰纳皮尔男爵所造的题为《奇妙的对数表的说明》一书，这个对数表的出版震动了整个数学界.

“对数”（logarithm）一词是纳皮尔首先创造的，意思是“比数”. 最早他用“人造的数”来表示对数.

俄国著名诗人莱蒙托夫是一位数学爱好者，传说有一次他在解答一道数学题时，冥思苦想没法解决，睡觉时做了一个梦，梦中一位老人揭示他解答的方法，醒后他真的把此题解出来了，莱蒙托夫把梦中老人的像画了出来，大家一看竟是数学家纳皮尔，这个传说告诉我们：纳皮尔在人们心目中的地位是多么的高.

第三章 函数的应用



I 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

通过本章的学习，使学生学会用二分法求方程近似解的方法，从中体会函数与方程之间的联系．通过一些实例，让学生感受建立函数模型的过程和方法，体会函数在数学和其他学科中的应用，认识到函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，并能初步运用函数思想解决现实生活中的一些简单问题.

2. 学习目标

(1) 结合二次函数的图象，判断一元二次方程根的存在性及根的个数，从而了解函数的零点与方程根的联系.

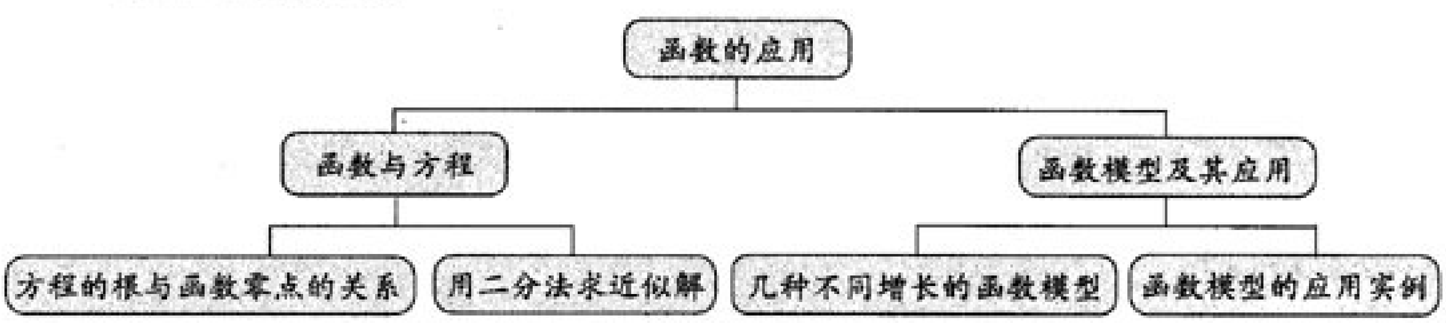
(2) 根据具体函数的图象，能够借助计算器用二分法求相应方程的近似解，了解这种方法是求方程近似解的常用方法.

(3) 利用计算工具，比较指数函数、对数函数以及幂函数间的增长差异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义.

(4) 通过收集一些社会生活中普遍使用的函数模型（指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等）的实例，了解函数模型的广泛应用.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分 2 节：3.1 函数与方程，3.2 函数模型及其应用．另外还有一个实习作业．

（1）教科书注重从学生已有的基础（一元二次方程及其根的求法，一元二次函数及其图象与性质）出发，从具体（一元二次方程的根与对应的一元二次函数的图象与 x 轴的交点的横坐标之间的关系）到一般，揭示方程的根与对应函数的零点之间的关系．在此基础上，再介绍求函数零点的近似值的“二分法”，并在总结“用二分法求函数零点的步骤”中渗透算法的思想，为学生后续学习算法内容埋下伏笔．教科书不仅希望学生在数学知识上有所收获，而且希望学生感受数学文化方面的熏陶，所以在“阅读与思考”中，介绍古今中外数学家在方程求解中所取得的成就，特别是我国古代数学家对数学发展与人类文明的贡献．

（2）对于函数增长的比较，教科书分了三个层次：首先以实例为载体让学生切实感受不同函数模型间的增长差异，然后采用图、表两种方法比较三个函数（$y=x^2$，$y=2^x$，$y=\log_2 x$）的增长差异，最后将结论推广到一般的指数函数、对数函数、幂函数间的增长差异．

（3）函数基本模型的应用是本章的重点内容之一．教科书用 4 个例题作示范，并配备了较多的实际问题让学生进行练习．在 4 个例题中，分别介绍了分段函数、指数型函数、二次函数的应用．在例 4 与例 6 中还渗透了函数拟合的基本思想．

（4）本章安排的实习作业主要是让学生收集现实生活中的一些函数实例，并运用已学习的函数知识解决一些问题，感受函数的广泛应用．

在本章中，由于方程的近似解一般都涉及较复杂的计算，函数应用问题也多数涉及较复杂的数据，因此，教科书较多地运用了信息技术工具，并专门安排了两个“信息技术应用”．

三、课时分配

本章教学时间约需 9 课时，具体分配如下（仅供参考）：

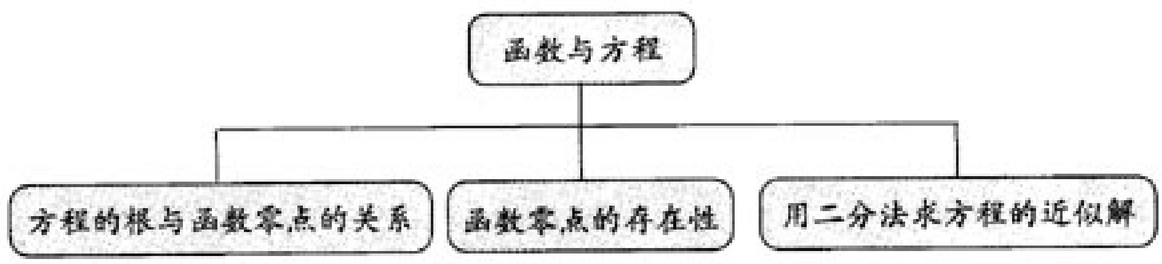
3.1 函数与方程	约 3 课时
3.2 函数模型及其应用	约 4 课时
实习作业	约 1 课时
小结	约 1 课时

II 教科书分析

本章章头图是一群兔子，与之相应的图中话道出了其中的意蕴：对于一个种群的数量，如果在理想状态（如没有天敌、食物充足等）下，那么它将呈指数增长；但在自然状态下，种群数量一般符合对数增长模型．事实上，不仅种群数量的增长，生活中大量事物的增长、衰减情况都是有差异的，相应地就需要用不同增长的函数模型来刻画它们．这样，面对不同情况时，如何选择恰当的函数模型描述它们就很重要．

3.1 函数与方程

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节重点是通过用“二分法”求方程的近似解，使学生体会函数的零点与方程根之间的联系，初步形成用函数观点处理问题的意识.

在利用“二分法”求方程的近似解的过程中，由于数值计算较为复杂，因此对获得给定精确度的近似解增加了困难．要解决这一困难，需要恰当地使用信息技术工具.

三、编写意图与教学建议

为了提高学生对函数的广泛应用、以及函数与其他数学内容有机联系的认识，教科书加强了知识间的联系，具体体现在结合函数的图象，判断方程根的存在性及根的个数，从而了解函数的零点与方程根的关系；根据具体函数的图象，借助计算器用二分法求方程的近似解，为算法学习作准备等.

教科书通过研究一元二次方程的根及相应的函数图象与 x 轴交点的横坐标的关系，导出函数的零点的概念；以具体函数在某闭区间上存在零点的特点，探究在某区间上图象连续的函数存在零点的判定方法；以求具体方程的近似解介绍“二分法”并总结其实施步骤等，都体现了从具体到一般的认知过程．教学时，要注意让学生通过具体实例的探究，归纳概括所发现的结论或规律，并用准确的数学语言表述出来.

这里要特别注意引导学生从联系的观点理解有关内容，沟通函数、方程、不等式以及算法等内容，使学生体会知识之间的联系．例如，结合二次函数的图象，判断一元二次方程根的存在性及根的个数，从而了解函数的零点与方程根之间的关系；根据具体函数的图象，能借助计算器用二分法求相应方程的近似解，为算法的学习做准备等．另外，还要特别注意信息技术的使用.

3.1.1 方程的根与函数的零点

1. 教学要点分析.

（1）教科书选取探究具体的一元二次方程的根与其对应的一元二次函数的图象与 x 轴的交点的横坐标之间的关系，作为本节内容的入口，其意图是让学生从熟悉的环境中发现新知识，使新知识与原

有知识形成联系．教学时，应该给学生提供探究情境，让学生自己发现并归纳出结论“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根就是相应的二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象与 x 轴的交点的横坐标”．

（2）给出函数零点的概念后，要让学生明确“方程的根”与“函数的零点”尽管有密切的联系，但不能将它们混为一谈．之所以介绍通过求函数的零点求方程的根，是因为函数的图象和性质，为理解函数的零点提供了直观认识，并为判定零点是否存在和求出零点提供了支持，这就使方程的求解与函数的变化形成联系，有利于分析问题的本质．

（3）教科书通过第 102 页的“探究”，让学生观察对应的二次函数在区间端点上的函数值之积的特点，引导学生发现连续函数在某个区间上存在零点的判定方法．教学时，可让学生多举些例子加深认识，如用计算器或计算机多画一些函数（不一定是二次函数）的图象进行观察与概括．教科书上给出的下述结论，只要求学生理解并会用，而不需给出证明．

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根．

2. 例题和习题教学分析．

例 1 是考察函数零点的个数．通过它要让学生认识到函数的图象及基本性质（特别是单调性）在确定函数零点中的重要作用．

（1）函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的图象可以让学生利用计算器或计算机画出．通过观察教科书上的图 3.1-3，发现函数的图象与 x 轴有一个交点，从而对函数有一个零点形成直观的认识．

（2）教科书上的表 3-1，可以让学生用计算器或计算机得出，使学生通过动手实践获得对表 3-1 的认同感．通过观察表 3-1，结合图象 3.1-3，不难得出函数的一个零点在区间 $(2,3)$ 内．

（3）要说明函数仅有一个零点，除上述理由外，还必须说明函数在其定义域内是单调的．可以由增（减）函数的定义证明函数在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，也可以由 $g(x)=\ln x$、$h(x)=2x-6$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，说明函数 $f(x)=g(x)+h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数．

第 103 页的练习可以让学生借助于计算器或计算机在课堂完成．第 1 题的（2）（3）（4），要启发学生将“＝”右边的项移至“＝”左边，然后将“＝”左边的代数式设为函数 $f(x)$，再通过探究函数的零点去得出方程的根的情况．当然，也可以启发学生思考：若将“＝”左、右两边的代数式分别设为函数 $f(x)$、$g(x)$，那么方程的根与函数 $f(x)$、$g(x)$ 的图象有什么关系？

3.1.2 用二分法求方程的近似解

1. 提出问题．

引导学生思考、讨论教科书第 104 页的“思考”．

2. 二分法教学分析．

教科书结合 3.1.1 中的例 1，介绍了二分法的基本思路和步骤．

（1）教学时，可以让学生结合函数 $f(x)=\ln x+2x-6$，先试着说说它的零点的值大概是多少？由此想得出包含这一零点的更小的范围，也就是将包含零点的范围由区间 $(2,3)$ 缩小到更小的区间，从而引出通过“取中点”而缩小零点所在范围的方法．

（2）在具体介绍二分法时，应该让学生利用计算器或计算机边操作边认识，最好是由学生自己得出表 3-2 的内容，这样可使学生更深刻地理解二分法的思想．例如，通过将自变量改变的步长不断减

半来得出下列表格：

x	y
2.	-1.306852819
2.5	-.0837092681
3.	1.0986122887
3.5	2.2527629685
4.	3.3862943611
4.5	4.5040773968
5.	5.6094379124
5.5	6.7047480922
x=2.	

（步长为 0.5）

x	y
2.	-1.306852819
2.25	-.6890697838
2.5	-.0837092681
2.75	.51160091168
3.	1.0986122887
3.25	1.6786549963
3.5	2.2527629685
3.75	2.82175584
x=2.	

（步长为 0.25）

x	y
2.	-1.306852819
2.125	-.9962281976
2.25	-.6890697838
2.375	-.3850025625
2.5	-.0837092681
2.625	.21508089604
2.75	.51160091168
2.875	.80605267425
x=2.	

（步长为 0.125）

x	y
2.3125	-.5366708096
2.375	-.3850025625
2.4375	-.234027076
2.5	-.0837092681
2.5625	.06598334446
2.625	.21508089604
2.6875	.36361139345
2.75	.51160091168
x=2.75	

（步长为 0.062 5）

x	y
2.46875	-.1587880503
2.5	-.0837092681
2.53125	-.0087867481
2.5625	.06598334446
2.59375	.140604705
2.625	.21508089604
2.65625	.28941535369
2.6875	.36361139345
x=2.6875	

（步长为 0.031 25）

x	y
2.5	-.0837092681
2.515625	-.0462287184
2.53125	-.0087867481
2.546875	.02861711745
2.5625	.06598334446
2.578125	.10331239054
2.59375	.140604705
2.609375	.17786072906
x=2.609375	

（步长为 0.015 625）

x	y
2.5	-.0837092681
2.5078125	-.0649641408
2.515625	-.0462287184
2.5234375	-.0275029407
2.53125	-.0087867481
2.5390625	.00991991841
2.546875	.02861711745
2.5546875	.04730490698
x=2.5	

（步长为 0.007 812 5）

x	y
2.51953125	-.0368646277
2.5234375	-.0275029407
2.52734375	-.01814365
2.53125	-.0087867481
2.53515625	.00056777222
2.5390625	.00991991841
2.54296875	.01926969773
2.546875	.02861711745
x=2.546875	

（步长为 0.003 906 25）

从上述表格可以快捷地得到教科书上的表 3-2，让学生有更多的时间来思考与体会二分法的实质.

（3）在总结用二分法求函数 $f(x)$ 的零点的步骤时，学生可能对步骤 3 与步骤 4 的理解有困难．在步骤 3 的（2）与（3）中，由于学生还没有算法的基本思想，对为什么要令 $b=x_1$ 或令 $a=x_1$，是不易讲明白的，这只能让他们在具体操作中去体会．在步骤 4 中，“为什么由 $|a-b|<\varepsilon$，便可判断零点的近似值为 a(或 b)”也是学生不易理解的．教学时可以作如下说明：

设函数的零点为 x_0，则 $a<x_0<b$. 作出数轴，在数轴上标上 a、b、x_0 对应的点（图 3-1）：

图 3-1

所以，$0<x_0-a<b-a$，$a-b<x_0-b<0$.

由于 $|a-b|<\varepsilon$，所以

$$|x_0-a|<b-a<\varepsilon,\ |x_0-b|<|a-b|<\varepsilon,$$

即 a 或 b 作为函数的零点 x_0 的近似值都达到给定的精确度 ε.

（4）最后，建议让学生意识到二分法是求方程近似解的一种常用的方法.

3. 例题和习题教学分析.

例 2 说明求方程的根的近似值可以转化为求函数的零点的近似值，并让学生体会用二分法求方程的近似解的完整过程.

此例也可以按下面的方法解答：

原方程化为

$$2^x+3x-7=0.$$

令 $f(x)=2^x+3x-7$，则原方程的根为函数 $f(x)$ 的零点.

因为 $f(1)=-2$，$f(2)=3$，所以 $f(1)\cdot f(2)<0$，即函数 $f(x)$ 在（1，2）内存在零点.

因为 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数，所以函数 $f(x)$ 在（1，2）内有唯一的零点.

根据二分法，用计算器得出以下表格：

x	y				
0.	-6.				
.5	-4.086				
1.	-2.				
1.5	.32843				
2.	3.				
2.5	6.1569				
3.	10.				
3.5	14.814				

x=3.5

x	y				
0.	-6.				
.25	-5.061				
.5	-4.086				
.75	-3.068				
1.	-2.				
1.25	-.8716				
1.5	.32843				
1.75	1.6136				

x=0.

x	y				
1.	-2.				
1.125	-1.444				
1.25	-.8716				
1.375	-.2813				
1.5	.32843				
1.625	.95942				
1.75	1.6136				
1.875	2.293				

x=1.875

x	y				
1.25	-.8716				
1.3125	-.5788				
1.375	-.2813				
1.4375	.02101				
1.5	.32843				
1.5625	.64115				
1.625	.95942				
1.6875	1.2835				

x=1.6875

通过上述表格，我们得知函数唯一的零点 x_0 在区间（1.375，1.437 5）内，即

$$1.375<x_0<1.437\ 5,$$

所以，原方程精确到 0.1 的近似解为 1.4.

第 106 页的练习给出了零点（或根）所在的区间，然后让学生用二分法求零点（或根）. 教学时，可以启发学生思考：所给的函数（或方程）还有其他的零点（或根）吗？这样做，可以让学生对一个具体函数（或方程）的零点（或根）的探究有更完整的认识.

四、习题解答

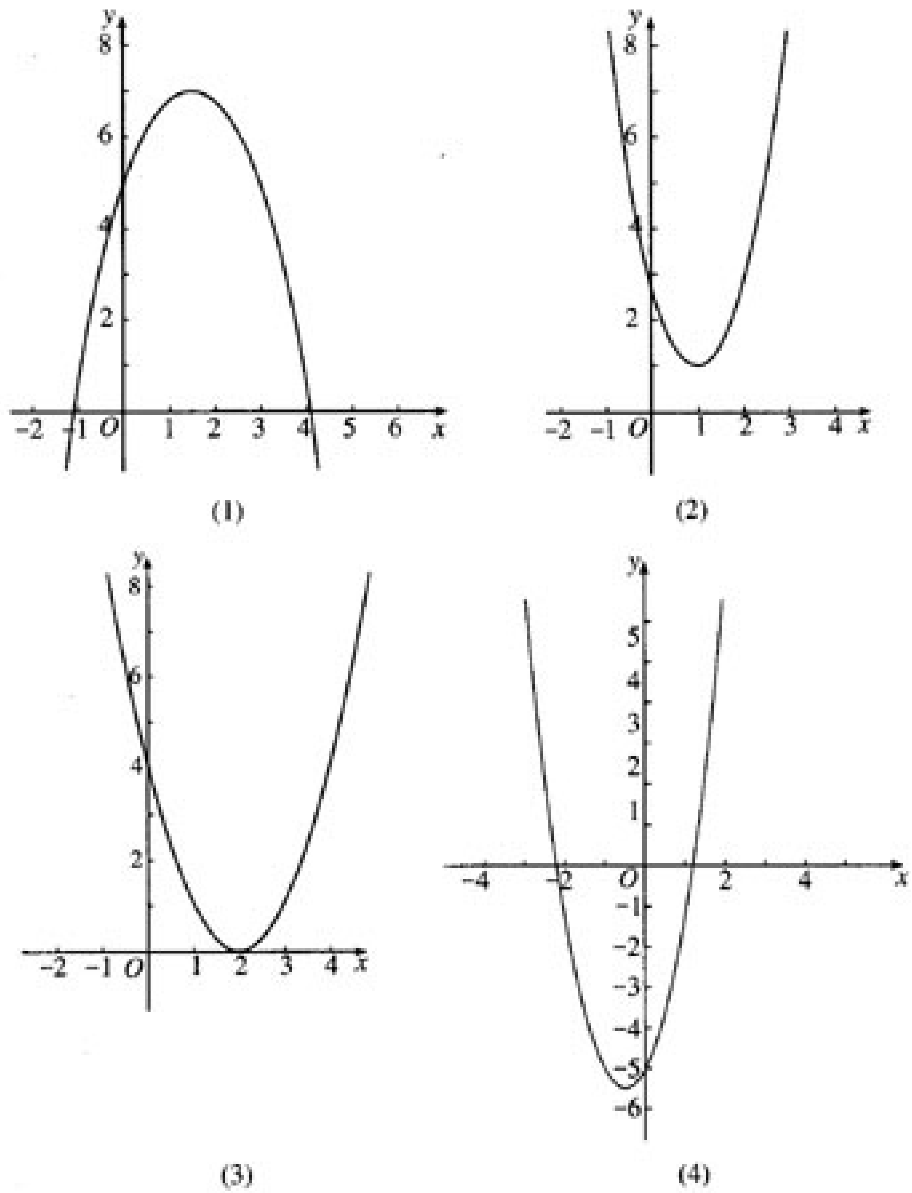
练习（第 103 页）

1.（1）令 $f(x)=-x^2+3x+5$，作出函数 $f(x)$ 的图象，它与 x 轴有两个交点，所以方程 $-x^2+3x+5=0$ 有两个不相等的实数根.

（2）$2x(x-2)=-3$ 可化为 $2x^2-4x+3=0$，令 $f(x)=2x^2-4x+3$，作出函数 $f(x)$ 的图象，它与 x 轴没有交点，所以方程 $2x(x-2)=-3$ 无实根.

（3）$x^2=4x-4$ 可化为 $x^2-4x+4=0$，令 $f(x)=x^2-4x+4$，作出函数 $f(x)$ 的图象，它与 x 轴只有一个交点（相切），所以方程 $x^2=4x-4$ 有两个相等的实数根.

（4）$5x^2+2x=3x^2+5$ 可化为 $2x^2+2x-5=0$，令 $f(x)=2x^2+2x-5$，作出函数 $f(x)$ 的图象，它与 x 轴有两个交点，所以方程 $5x^2+2x=3x^2+5$ 有两个不相等的实数根．



（第1题）

2.（1）作出函数图象，因为 $f(1)=1>0$，$f(1.5)=-2.875<0$，所以 $f(x)=-x^3-3x+5$ 在区间 $(1,\ 1.5)$ 上有一个零点.

又因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的减函数，所以 $f(x)=-x^3-3x+5$ 在区间 $(1,\ 1.5)$ 上有且只有一个零点.

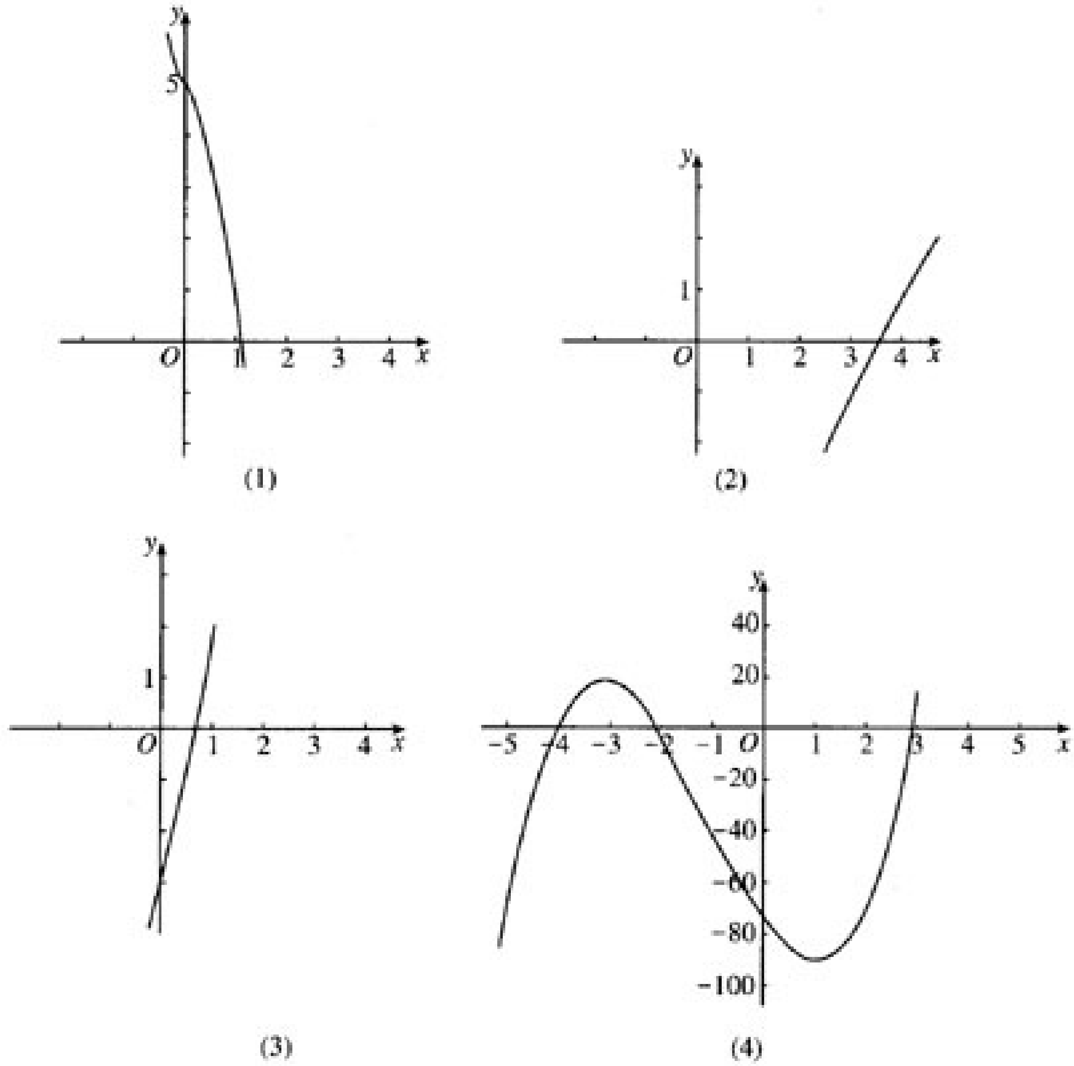
（2）作出函数图象，因为 $f(3)<0$，$f(4)>0$，所以 $f(x)=2x\cdot\ln(x-2)-3$ 在区间 $(3,\ 4)$ 上有一个零点.

又因为 $f(x)=2x\cdot\ln(x-2)-3$ 在 $(2,\ +\infty)$ 上是增函数，所以 $f(x)$ 在 $(2,\ +\infty)$ 上有且仅有一个 $(3,\ 4)$ 上的零点．

（3）作出函数图象，因为 $f(0)<0$，$f(1)>0$，所以 $f(x)=e^{x-1}+4x-4$ 在区间 $(0,\ 1)$ 上有一个零点.

又因为 $f(x)=e^{x-1}+4x-4$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上是增函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上有且仅有一个零点.

（4）作出函数图象，因为 $f(-4)<0$，$f(-3)>0$，$f(-2)<0$，$f(2)<0$，$f(3)>0$，所以 $f(x)=3(x+2)(x-3)(x+4)+x$ 在 $(-4,\ -3)$，$(-3,\ -2)$，$(2,\ 3)$ 上各有一个零点．



（第 2 题）

练习（第 106 页）

1. 由题设可知

$$f(0)=-1.4<0,\ f(1)=1.6>0,$$

于是

$$f(0)\cdot f(1)<0,$$

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有一个零点.

下面用二分法求函数 $f(x)=x^3+1.1x^2+0.9x-1.4$ 在区间 $(0,1)$ 内的零点.

取区间 $(0,1)$ 的中点 $x_1=0.5$，用计算器可算得 $f(0.5)=-0.55$. 因为 $f(0.5)\cdot f(1)<0$，所以 $x_0\in(0.5,1)$.

再取区间 $(0.5,1)$ 的中点 $x_2=0.75$，用计算器可算得 $f(0.75)\approx0.32$. 因为 $f(0.5)\cdot f(0.75)<0$，所以 $x_0\in(0.5,0.75)$.

同理可得 $x_0\in(0.625,0.75)$，$x_0\in(0.625,0.687\,5)$，$x_0\in(0.656\,25,0.687\,5)$.

由于

$$|0.687\,5-0.656\,25|=0.031\,25<0.1,$$

此时区间 $(0.656\,25,0.687\,5)$ 的两个端点精确到 0.1 的近似值都是 0.7，所以原函数在区间 $(0,1)$ 内精确到 0.1 的零点约为 0.7.

2. 原方程即 $x+\lg x-3=0$，令 $f(x)=x+\lg x-3$，用计算器可算得

$$f(2)\approx-0.70,\ f(3)\approx0.48,$$

于是

$$f(2)\cdot f(3)<0,$$

所以，这个方程在区间（2，3）内有一个解.

下面用二分法求方程 $x=3-\lg x$ 在区间（2，3）的近似解.

取区间（2，3）的中点 $x_1=2.5$，用计算器可算得 $f(2.5)\approx-0.10$. 因为 $f(2.5)\cdot f(3)<0$，所以 $x_0\in(2.5,3)$.

再取区间（2.5，3）的中点 $x_2=2.75$，用计算器可算得 $f(2.75)\approx0.19$. 因为 $f(2.5)\cdot f(2.75)<0$，所以 $x_0\in(2.5,2.75)$.

同理可得 $x_0\in(2.5,2.625)$，$x_0\in(2.562\,5,2.625)$，$x_0\in(2.562\,5,2.593\,75)$，$x_0\in(2.578\,125,2.593\,75)$，$x_0\in(2.585\,937\,5,2.59\,375)$.

由于

$$|2.585\,937\,5-2.593\,75|=0.007\,812\,5<0.01,$$

此时区间（2.585 937 5，2.593 75）的两个端点精确到 0.01 的近似值都是 2.59，所以原方程精确到 0.01 的近似解为 2.59.

习题 3.1（第 108 页）

A 组

1. A，C.

说明 了解二分法求函数的近似零点的条件.

2. 由 x、$f(x)$ 的对应值表可得

$$f(2)\cdot f(3)<0,\ f(3)\cdot f(4)<0,\ f(4)\cdot f(5)<0,$$

又根据"如果函数 $y=f(x)$在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点．"可知函数 $f(x)$ 分别在区间（2，3），（3，4），（4，5）内有零点.

3. 原方程即 $(x+1)(x-2)(x-3)-1=0$，令 $f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)-1$，可算得

$$f(-1)=-1,\ f(0)=5,$$

于是

$$f(-1)\cdot f(0)<0,$$

所以，这个方程在区间（−1，0）内有一个解.

下面用二分法求方程 $(x+1)(x-2)(x-3)=1$ 在区间（−1，0）内的近似解.

取区间（−1，0）的中点 $x_1=-0.5$，用计算器可算得 $f(-0.5)=3.375$. 因为 $f(-1)\cdot f(-0.5)<0$，所以 $x_0\in(-1,-0.5)$.

再取（−1，−0.5）的中点 $x_2=-0.75$，用计算器可算得 $f(-0.75)\approx1.58$. 因为 $f(-1)\cdot f(-0.75)<0$，所以 $x_0\in(-1,-0.75)$.

同理可得 $x_0\in(-1,-0.875)$，$x_0\in(-0.937\,5,-0.875)$.

由于

$$|(-0.875)-(-0.937\,5)|=0.062\,5<0.1,$$

此时区间（−0.937 5，−0.875）的两个端点精确到 0.1 的近似值都是−0.9，所以原方程精确到 0.1 的近似解为−0.9.

4. 原方程即 $0.8^x-1-\ln x=0$，令 $f(x)=0.8^x-1-\ln x$，$f(0)$ 没有意义，用计算器算得

$$f(0.5)\approx0.59,\ f(1)=-0.2,$$

于是

$$f(0.5)\cdot f(1)<0,$$

所以，这个方程在区间 (0.5，1) 内有一个解.

下面用二分法求方程 $0.8^x-1=\ln x$ 在区间 (0，1) 内的近似解.

取区间 (0.5，1) 的中点 $x_1=0.75$，用计算器可算得 $f(0.75)\approx 0.13$. 因为 $f(0.75)\cdot f(1)<0$，所以 $x_0\in(0.75, 1)$.

再取 (0.75，1) 的中点 $x_2=0.875$，用计算器可算得 $f(0.875)\approx -0.04$. 因为 $f(0.875)\cdot f(0.75)<0$，所以 $x_0\in(0.75, 0.875)$.

同理可得 $x_0\in(0.812\,5, 0.875)$，$x_0\in(0.812\,5, 0.843\,75)$.

由于

$$|0.812\,5-0.843\,75|=0.031\,25<0.1,$$

此时区间 (0.812 5，0.843 75) 的两个端点精确到 0.1 的近似值都是 0.8，所以原方程精确到 0.1 的近似解为 0.8.

5. 由题设有

$$f(2)\approx -0.31<0,\ f(3)\approx 0.43>0,$$

于是

$$f(2)\cdot f(3)<0,$$

所以，函数 $f(x)$ 在区间 (2，3) 内有一个零点.

下面用二分法求函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$ 在区间 (2，3) 内的近似解.

取区间 (2，3) 的中点 $x_1=2.5$，用计算器可算得 $f(2.5)\approx 0.12$. 因为 $f(2)\cdot f(2.5)<0$，所以 $x_0\in(2, 2.5)$.

再取 (2，2.5) 的中点 $x_2=2.25$，用计算器可算得 $f(2.25)\approx -0.08$. 因为 $f(2.25)\cdot f(2.5)<0$，所以 $x_0\in(2.25, 2.5)$.

同理可得 $x_0\in(2.25, 2.375)$，$x_0\in(2.312\,5, 2.375)$，$x_0\in(2.343\,75, 2.375)$，$x_0\in(2.343\,75, 2.359\,375)$，$x_0\in(2.343\,75, 2.351\,562\,5)$，$x_0\in(2.343\,75, 2.347\,656\,25)$.

由于

$$|2.343\,75-2.347\,656\,25|=0.003\,906\,25<0.1,$$

此时区间 (2.343 75，2.347 656 25) 的两个端点精确到 0.1 的近似值都是 2.3，所以函数在区间 (2，3) 内精确到 0.1 的零点约为 2.3.

6. (1) 盒子的体积 y 以 x 为自变量的函数解析式为

$$y=(15-2x)^2x,$$

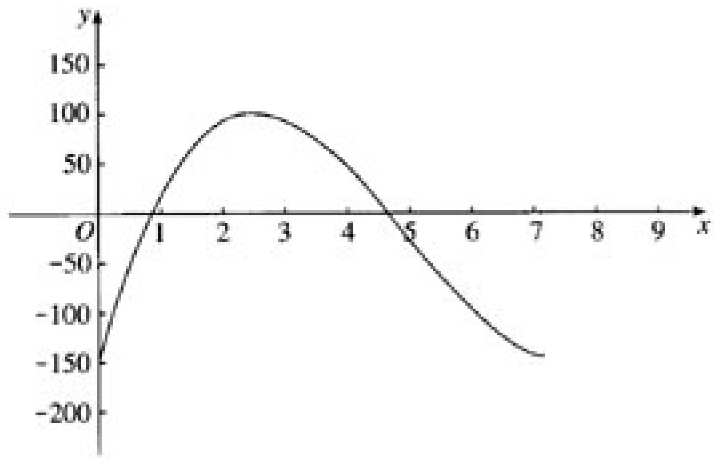
其定义域为 $\{x|0<x<7.5\}$.

(2) 如果要做成一个容积是 150 cm^3 的无盖盒子，那么有方程

$$(15-2x)^2x=150.$$

下面用二分法来求方程在 (0，7.5) 内的近似解.

令 $f(x)=(15-2x)^2x-150$，函数图象如下所示：



（第 6 题）

由图象可以看到，函数 $f(x)$ 分别在区间（0，1）和（4，5）内各有一个零点，即方程 $(15-2x)^2x=150$. 分别在区间（0，1）和（4，5）内各有一个解．下面用二分法求方程的近似解.

取区间（0，1）的中点 $x_1=0.5$，用计算器可算得 $f(0.5)=-52$. 因为 $f(0.5)\cdot f(1)<0$，所以 $x_0\in(0.5,\ 1)$.

再取（0.5，1）的中点 $x_2=0.75$，用计算器可算得 $f(0.75)\approx-13.31$. 因为 $f(0.75)\cdot f(1)<0$，所以 $x_0\in(0.75,\ 1)$.

同理可得 $x_0\in(0.75,\ 0.875)$，$x_0\in(0.812\ 5,\ 0.875)$，$x_0\in(0.843\ 75,\ 0.875)$，$x_0\in(0.843\ 75,\ 0.859\ 375)$，$x_0\in(0.843\ 75,\ 0.851\ 562\ 5)$，$x_0\in(0.843\ 75,\ 0.847\ 656\ 25)$.

由于

$$|0.843\ 75-0.847\ 656\ 25|=0.003\ 906\ 25<0.1,$$

此时区间（0.843 75，0.847 656 25）的两个端点精确到 0.1 的近似值都是 0.8，所以方程在区间（0，1）内精确到 0.1 的近似解为 0.8.

同理可得方程在区间（4，5）内精确到 0.1 的近似解为 4.7.

答：如果要做成一个容积是 150 cm^3 的无盖盒子时，截去的小正方形的边长大约是 0.8 cm 或 4.7 cm.

B 组

1. 将系数代入求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 得

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4},$$

所以方程的两个解分别为 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$.

下面用二分法求方程的近似解.

取区间（1.775，1.8）和（−0.3，−0.275），令 $f(x)=2x^2-3x-1$. 在区间（1.775，1.8）内用计算器可算得

$$f(1.775)=-0.023\ 75,\ f(1.8)=0.08,$$

于是

$$f(1.775)\cdot f(1.8)<0.$$

所以，这个方程在区间（1.775，1.8）内有一个解.

由于

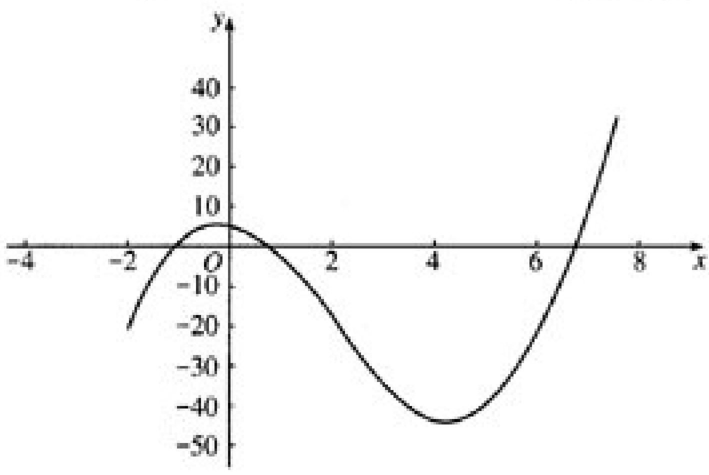
$$|1.8-1.775|=0.025<0.1,$$

此时区间（1.775，1.8）的两个端点精确到 0.1 的近似值都是 1.8，所以方程在区间（1.775，1.8）内精确到 0.1 的近似解为 1.8.

同理可得，方程在区间（−0.3，−0.275）内精确到 0.1 的近似解为−0.3.

所以，方程精确到 0.1 的近似解分别是 1.8 和−0.3.

2. 原方程即 $x^3-6x^2-3x+5=0$，令 $f(x)=x^3-6x^2-3x+5$，函数图象如下所示.



（第 2 题）

所以，这个方程在区间（−2，0），（0，1），（6，7）内各有一个解.

取区间（−2，0）的中点 $x_1=-1$，用计算器可算得 $f(-1)=1$. 因为 $f(-2)\cdot f(-1)<0$，所以 $x_0\in(-2,-1)$.

再取（−2，−1）的中点 $x_2=-1.5$，用计算器可算得 $f(-1.5)=-7.375$. 因为 $f(-1.5)\cdot f(-1)<0$，所以 $x_0\in(-1.5,-1)$.

同理可得 $x_0\in(-1.25,-1)$，$x_0\in(-1.125,-1)$，$x_0\in(-1.125,-1.0625)$.

由于

$$|(-1.0625)-(-1.125)|=0.0625<0.1,$$

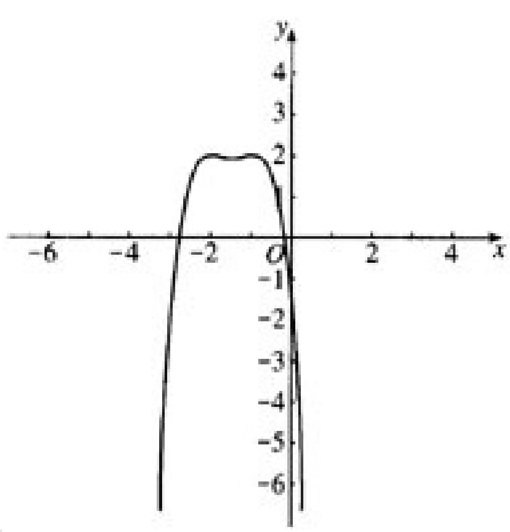
此时区间（−1.125，−1.062 5）的两个端点精确到 0.1 的近似值都是−1.1，所以原方程在区间（−2，0）内精确到 0.1 的近似解为−1.1.

同理可得原方程在区间（0，1）内精确到 0.1 的近似解为 0.7，在区间（6，7）内精确到 0.1 的近似解为 6.3.

3.（1）由题设有

$$\begin{aligned}g(x)&=2-[f(x)]^2\\&=2-(x^2+3x+2)^2\\&=-x^4-6x^3-13x^2-12x-2.\end{aligned}$$

（2）函数图象如下所示.



（第 3 题）

（3）由图象可知，函数 $g(x)$ 在分别区间（−3，−2）和区间（−1，0）内各有一个零点.

取区间（−3，−2）的中点 $x_1=-2.5$，用计算器可算得 $g(-2.5)=0.1875$. 因为 $g(-3)\cdot g(-2.5)<0$，所以 $x_0\in(-3,-2.5)$.

再取（−3，−2.5）的中点 $x_2=-2.75$，用计算器可算得 $g(-2.75)\approx0.28$. 因为 $g(-3)\cdot g(-2.75)<0$，所

以$x_0\in(-3,\ -2.75)$.

同理可得 $x_0\in(-2.875,\ -2.75)$，$x_0\in(-2.812\,5,\ -2.75)$.

由于

$$|-2.75-(-2.812\,5)|=0.062\,5<0.1,$$

此时区间（$-2.812\,5$，-2.75）的两个端点精确到 0.1 的近似值都是-2.8，所以函数在区间$(-4,\ -3)$内精确到 0.1 的零点约为-3.5.

同样可求得函数在区间（-1，0）内精确到 0.1 的零点约为-0.2.

所以，函数 $g(x)$ 精确到 0.1 的零点约为-3.5或-0.2.

4. 设该基金会的平均年收益率为 x，那么

1 年后，投资收益的一半为 $440\times\frac{x}{2}$；

2 年后，投资收益的一半为 $440\left(1+\frac{x}{2}\right)\times\frac{x}{2}$；

……

50 年后，投资收益的一半为 $440\left(1+\frac{x}{2}\right)^{49}\times\frac{x}{2}$.

由题意有

$$440\left(1+\frac{x}{2}\right)^{49}\times\frac{x}{2}=68,$$

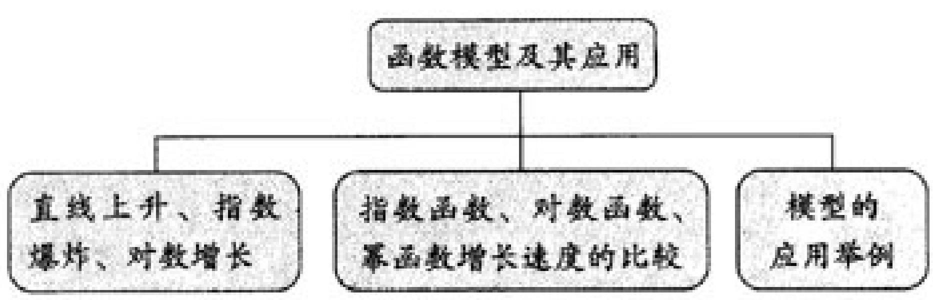
用二分法解得

$$x\approx0.046\,8.$$

答：该基金会的年平均收益率约为 6.48%.

3.2 函数模型及其应用

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

本节的教学重点是认识指数函数、对数函数、幂函数等函数模型的增长差异，体会直线上升、指数爆炸与对数增长，应用函数模型解决简单问题.

学生对指数函数、对数函数、幂函数等的增长速度的认识还很少，所以让学生比较这几种函数的

增长差异会有困难．如何选择适当的函数模型分析和解决实际问题是另一个困难．

三、编写意图与教学建议

教科书对几种不同增长的函数模型的认识及应用，都是通过实例来实现的．这是因为函数模型本身就来源于现实，并用于解决实际问题．同时，这样做还能给学生提供更多的机会从实际问题中发现或建立数学模型，并体会数学在实际问题中的应用价值．

3.2.1　几种不同增长的函数模型

1. 实例分析．

（1）教科书选取了投资回报和选择奖励模型两个实例，让学生对直线上升、指数爆炸与对数增长有一个感性的认识，初步发现当自变量变得很大时，指数函数比一次函数增长得快，一次函数比对数函数增长得快．

（2）例 1 的教学中，重点应当让学生体会指数爆炸．这可以让学生利用计算器或计算机得出以下表格，观察指数函数 $y=0.4\times 2^{x-1}$（$x\in \mathbf{N}^*$）的增长速度．

x	y
1.	.4
2.	.8
3.	1.6
4.	3.2
5.	6.4
6.	12.8
7.	25.6
8.	51.2

x=1.

x	y
9.	102.4
10.	204.8
11.	409.6
12.	819.2
13.	1638.4
14.	3276.8
15.	6553.6
16.	13107.

x=9.

x	y
17.	26214.4
18.	52428.8
19.	104857.6
20.	209715.2
21.	419430.4
22.	838860.8
23.	1677721.6
24.	3355443.2

x=17.

x	y
25.	6710886.4
26.	13421772.8
27.	26843545.6
28.	53687091.2
29.	107374182.4
30.	214748364.8
31.	429496729.6
32.	858993459.2

x=25.

（3）在例 2 中，将三个函数增长模型 $y=0.25x$，$y=\log_7 x+1$，$y=1.002^x$ 同时呈现给学生，主要目的是让学生感受它们增长速度的差异．教学时，除了用函数的图象直观展示这种增长差异外，还可以通过以下的表格让学生从另一个角度去认识．

x	y1	y2	y3
10.	.25	2.1833	1.0202
160.	4.	3.6081	1.3767
310.	7.75	3.948	1.8578
460.	11.5	4.1508	2.507
610.	15.25	4.2959	3.3831
760.	19.	4.4089	4.5653
910.	22.75	4.5014	6.1607
1060.	26.5	4.5798	8.3135

x=10.

x	y1	y2	y3
1060.	26.5	4.5798	8.3135
1210.	30.25	4.6478	11.219
1360.	34.	4.7079	15.139
1510.	37.75	4.7617	20.43
1660.	41.5	4.8103	27.569
1810.	45.25	4.8548	37.203
1960.	49.	4.8957	50.204
2110.	52.75	4.9336	67.747

x=1060.

x	y1	y2	y3
2110.	52.75	4.9336	67.747
2260.	56.5	4.9689	91.422
2410.	60.25	5.0019	123.37
2560.	64.	5.033	166.48
2710.	67.75	5.0622	224.66
2860.	71.5	5.0899	303.17
3010.	75.25	5.1162	409.11
3160.	79.	5.1412	552.08

x=2110.

x	y1	y2	y3
3160.	79.	5.1412	552.08
3310.	82.75	5.165	745.
3460.	86.5	5.1878	1005.3
3610.	90.25	5.2096	1356.7
3760.	94.	5.2305	1830.8
3910.	97.75	5.2506	2470.5
4060.	101.5	5.2699	3333.9
4210.	105.25	5.2886	4498.9

x=3160.

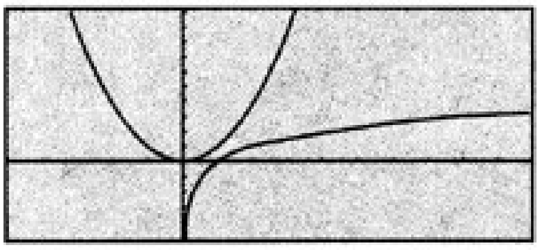
2. 三类函数增长差异的比较．

在对不同类型的增长差异具有一定感性认识的基础上，教科书利用信息技术从图、表两方面首先

对具体函数 $y=2^x$，$y=x^2$，$y=\log_2 x$ 的增长差异进行了比较，然后将结论推广到了一般的指数函数、幂函数及对数函数.

（1）教科书比较了 $y=2^x$，$y=x^2$ 两个函数的增长速度，而把 $y=x^2$，$y=\log_2 x$ 两个函数的增长速度的比较以“探究”形式留给了学生．建议教学中，尽可能地让学生自己利用计算器或计算机从图、表两方面完成“探究”活动，并结合教科书已有的关于 $y=2^x$，$y=x^2$ 增长比较的结论，尝试着说说函数 $y=2^x$，$y=x^2$，$y=\log_2 x$ 的增长差异.

利用计算器或计算机得到的关于 $y=x^2$，$y=\log_2 x$ 的图表如下.



x	y1	y2
.1	.01	-3.322
10.1	102.01	3.3363
20.1	405.01	4.3291
30.1	906.01	4.9117
40.1	1608.	5.3255
50.1	2510.	5.6467
60.1	3612.	5.9093
70.1	4914.	6.1313

x=.1

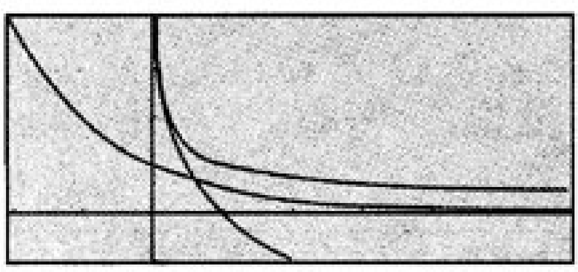
图 3-2

由以上的图表可以得出：在区间（0，$+\infty$）上，总有 $x^2>\log_2 x$；由教科书上的图 3.2-4 与表3-6 可以得出：当 $x>4$ 时，总有 $2^x>x^2$. 所以，当 $x>4$ 时，总有 $2^x>x^2>\log_2 x$.

（2）通过教学应让学生认识到，“在区间（0，$+\infty$）上，尽管函数 $y=a^x(a>1)$，$y=\log_a x(a>1)$ 和 $y=x^n$（$n>0$）都是增函数，但它们的增长速度不同，而且不在同一个‘档次’上．随着 x 的增大，$y=a^x$（$a>1$）的增长速度越来越快，会超过并远远大于 $y=x^n$（$n>0$）的增长速度，而 $y=\log_a x$（$a>1$）的增长速度则会越来越慢．因此，总会存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，就有 $\log_a x<x^n<a^x$”.

（3）教科书第 119 页的“探究”，希望学生仿照本小节比较三类函数增长差异的方法和过程比较它们的衰减情况，例如从具体到一般，数形结合等方法.

首先比较三个具体函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$、$y=x^{-\frac{1}{2}}$、$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的衰减情况，作出它们的图象及函数值变化表.



x	y1	y2	y3
.1	.93303	3.1623	3.3219
.3	.81225	1.8257	1.737
.5	.70711	1.4142	1.
.7	.61557	1.1952	.51457
.9	.53589	1.0541	.152
1.1	.46652	.95346	-.1375
1.3	.40613	.87706	-.3785
1.5	.35355	.8165	-.585

x=.1

图 3-3

通过观察上面的图表，获得这三个具体函数的衰减情况，然后将结论推广到一般的情况，即存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，$x^n>a^x>\log_a x$.

3.2.2　函数模型的应用实例

1. 内容提要.

函数模型的应用实例主要包含三个方面：利用给定的函数模型解决实际问题，如例 4；建立确定性函数模型解决问题及建立拟合函数模型解决实际问题，如例 3，例 5，例 6.

2. 例题教学分析.

（1）例 3 所涉及的数学模型是确定的，需要我们利用问题中的数据及其蕴含的关系建立数学模型. 此题的主要意图是让学生用函数模型（分段函数）刻画实际问题．教学中，可以先将图 3.2-7 中的阴影部分隐去，得到一个速度关于时间变化的图象，然后给出图 3.2-7 中的一个阴影矩形的面积让学生理解它的意义，最后在这个基础上，再让学生理解整个阴影部分的面积的意义．建立里程表读数 s 关于时间 t 的函数解析式，要以准确读图 3.2-7 为基础，所以本题有培养学生读图能力的功能.

对于边框中的“你能根据图 3.2-7 作出汽车行驶路程关于时间变化的图象吗”，可以按以下步骤思考：

① 获得路程关于时间变化的函数解析式：

$$s=\begin{cases}50t, & 0\leqslant t<1,\\ 80(t-1)+50, & 1\leqslant t<2,\\ 90(t-2)+130, & 2\leqslant t<3,\\ 75(t-3)+220, & 3\leqslant t<4,\\ 65(t-4)+295, & 4\leqslant t<5.\end{cases}$$

② 根据上面的函数解析式画出汽车行驶路程关于时间变化的图象．其实这个图象就是教科书上的图 3.2-8 上的函数图象向下平移了 2004 个单位.

（2）例 4 中的数学模型 $y=y_0e^{rt}$ 是指数型函数模型，它由 y_0 与 r 两个参数决定，而 y_0 与 r 的值不难得到．本题意在让学生验证问题中的数据与所提供的数学模型是否吻合，并用数学模型解释实际问题，并利用模型进行预测，这也是此题的难点．教学中，可以用计算器或计算机作出函数 $y=55\ 196e^{0.022\ 1t}$（$t\in\mathbf{N}$）的图象，并由 1950～1959 年的人口数据作出散点图，通过比较散点图与函数 $y=55\ 196e^{0.022\ 1t}$（$t\in\mathbf{N}$）的图象的吻合程度，确定函数模型与人口数据的吻合程度.

根据函数模型 $y=55\ 196e^{0.022\ 1t}$（$t\in\mathbf{N}$）预测我国大约哪一年的人口将达到 13 亿时，要让学生明确，这实际上是通过求一个对数值来确定 t 的近似值，即

$$t=\frac{10\ 000}{221}(\ln 130\ 000-\ln 551\ 96)\approx 38.76.$$

（3）例 5 所给问题的特点是表 3-9 中数据的变化是有特定规律的，教学时应注意引导学生分析问题所提供的数据特点，由数据特点抽象出函数模型．同时，应注意变量的变化范围，并以此检验结果的合理性.

（4）例 6 只给出了通过测量得到的统计数据表，要想由这些数据直接发现函数模型是困难的.

教学中，可以引导学生将表中的数据输入计算器或计算机，画出它们的散点图（图 3-4），然后让学生观察和思考，所作的散点图与已知的哪个函数的图象最接近，从而选择这个函数模型.

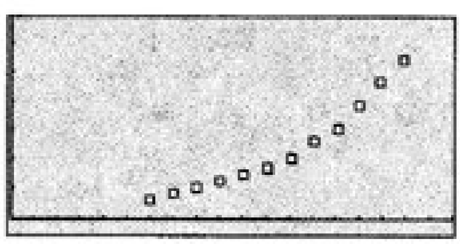


图 3-4

通过散点图，发现指数型函数 $y=a\cdot b^x$ 的图象可能与散点图的吻合较好，从而可以选择函数 $y=a\cdot b^x$ 来刻画该地区未成年人体重与身高的关系．由于函数式 $y=a\cdot b^x$ 中只有两个待定参数 a、b，故只需选取两组数据就能求出 a、b 的值.

如果选取（60，6.13）、（70，7.90）两组数据，可以用计算器得出 $a=1.338$，$b=1.026$，从而函

数的解析式为 $y=1.338\cdot 1.026^x$. 同时画出这个函数的图象与散点图，得到图 3-5.

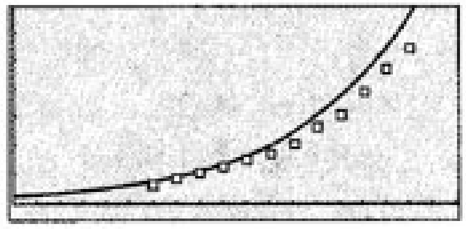


图 3-5

我们发现，函数 $y=1.338\cdot 1.026^x$ 不能很好地反映该地区未成年人体重与身高的关系.

在得出上述结论以后，可以让学生自己选择两组数据进行研究，直至得到自己较为满意的函数模型．比如教科书取（70，7.90），（160，47.25）两组数据，算出 $a=1.965$，$b=1.020$，这样得到函数模型为 $y=1.965\cdot 1.020^x$. 同时画出这个函数的图象与散点图，得到图 3-6.

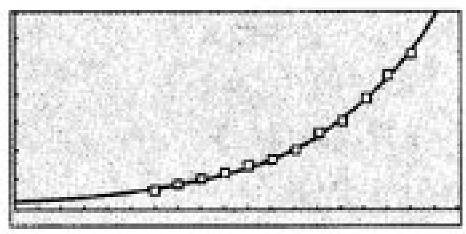


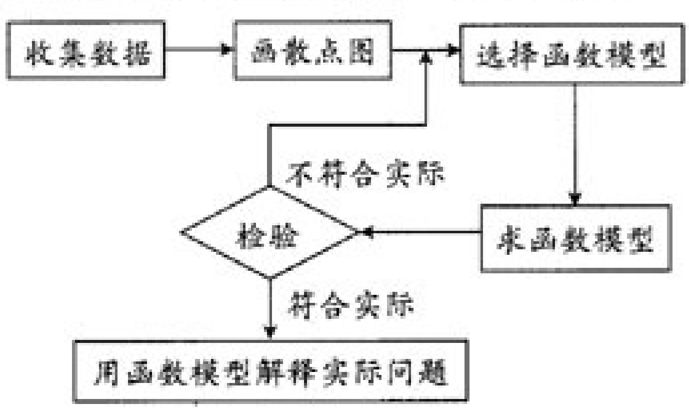
图 3-6

我们发现，散点图上的点基本上在或接近函数 $y=1.965\cdot 1.020^x$ 的图象．所以，函数 $y=1.965\cdot 1.020^x$ 能较好地刻画该地区未成年人体重与身高的关系．利用这个函数模型，我们能得出这个地区某校身高为 175 cm，体重为 78 kg 的男生偏胖.

3. 例题的回顾与总结.

本小节的四个例子各有特点，在例题教学结束后，建议引导学生回顾问题特点、解决问题的过程和方法．例如，例 3，例 5 是一类变量间具有确定关系的问题，根据这个关系就可以建立函数模型解决问题；与例 3，例 5 不同的是，例 4，例 6 都是需要判断所选择的函数模型与问题所给数据的吻合程度，像例 6 用“当取表中不同的两组数据时，得到的函数解析式可能也会不一样”这句话体现了这点不同；例 4，例 6 略有不同的是例 4 给出了函数模型，例 6 需要自己根据数据特点选择函数模型，这反映了一个较为完整的建立函数模型解决问题的过程，建议教学时逐渐让学生感受和明确这一点.

根据收集到的数据的特点建立函数模型，解决实际问题的基本过程：



四、教学设计案例

几种不同增长的函数模型（第1课时）

1. 教学任务分析

（1）借助信息技术，利用函数图象及数据表格，比较指数函数、对数函数以及幂函数的增长差异.

（2）结合实例体会直线上升，指数爆炸，对数增长等不同增长的函数模型的意义.

（3）恰当运用函数的三种表示法（解析式、图象、表格）并借助信息技术解决一些实际问题.

（4）收集一些社会生活中普遍使用的函数模型（指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等），了解函数模型的广泛应用.

2. 教学重点与难点

重点：将实际问题转化为函数模型，比较常数函数、一次函数、指数函数、对数函数模型的增长差异，结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义.

难点：怎样选择数学模型分析解决实际问题.

3. 教学基本流程

阅读、理解、审题

↓

选择自变量写出函数解析式确定函数模型

↓

利用数据表格、函数图象讨论模型

↓

体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数模型增长的含义

↓

师生交流共同小结

↓

课后作业

4. 教学情境设计

问　题	问题设计意图	师生活动
（1）在例1中，涉及哪些数量关系？如何用函数描述这些数量关系？	学会将实际问题转化为数学问题.	教师引导学生阅读例1，分析其中的数量关系，思考应当选择怎样的函数模型来描述；由学生自己根据数量关系，归纳概括出相应的函数模型，写出每个方案的函数解析式. 教师应当在数量关系的分析、函数模型的选择上作出指导.

续表

问　题	问题设计意图	师生活动
（2）根据例1表格中所提供的数据，你对三种方案分别表现出的回报资金的增长差异有什么认识？	从表格中获取信息，体会三种函数的增长差异，特别是体会指数爆炸.	教师引导学生观察表格中三个方案的数量变化情况，对于“增加量”进行比较，体会“直线增长”“指数爆炸”等；学生通过观察，说出自己的发现，并进行交流.
（3）你能借助计算器或计算机作出函数图象，并通过图象描述一下三个方案的特点吗？	利用图象从整体上把握不同函数模型的增长.	教师引导学生利用函数图象分析三种方案的不同变化趋势. 学生对这种变化趋势作出描述，为方案的选择提供依据.
（4）由以上的分析，你认为应当如何作出选择？	培养学生分析整理数据并根据其中的信息做出推理判断的能力.	教师引导学生分析影响方案选择的因素，使学生认识到要做出正确选择，除了考虑每天的收益，还要考虑一段时间内的总收益. 学生通过自主活动，获得累计收益并给出本题的完整解答，然后全班进行交流.
（5）例2涉及了哪几类函数模型？本例的实质是什么？	进一步体会三种基本函数模型在实际中的广泛应用，体会它们的增长差异.	教师引导学生分析三种函数的不同增长情况对于奖励模型的选择的影响，使学生明确问题的实质就是要比较三个函数的增长情况.
（6）你能根据问题中的数据，判定所给的奖励模型是否符合公司要求吗？	分析数据特点与作用，判定每一个奖励模型是否符合要求.	教师引导学生分析问题，使学生得出：要对每一个奖励模型的奖金总数是否超出5万元，以及奖励比例是否超过25%进行分析，这样才能做出正确选择.
（7）通过对三个函数模型增长差异的比较，你能写出例2的解答吗？	进一步认识三个函数模型的增长差异，对问题作出具体解答.	教师引导学生利用解析式，结合图象，对三个模型的增长情况进行分析比较，写出完整的解答过程.
（8）师生交流与小结：确定函数模型→利用数据表格、函数图象讨论模型→体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义.		
（9）课后作业： ① 第116页练习第2题； ② 举出生活实例，并用函数模型进行分析.		

5. 几点说明

（1）在分析例1的数据表时，可以让学生尝试完成第116页练习的第1题.

（2）教科书上的数据表、函数图象可以让学生利用计算机来作出，以利于学生亲身体验不同函数类型的增长差异，同时培养他们的动手能力，以及使用信息技术的能力.

（3）本节课的学习内容可作为下节课学习的实际背景，也可以作为下节课学习内容的应用实例.

（4）在教学中，教师要引导学生不断体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型，体验指数函数、对数函数、幂函数的增长差异.

五、习题解答

练习（第 116 页）

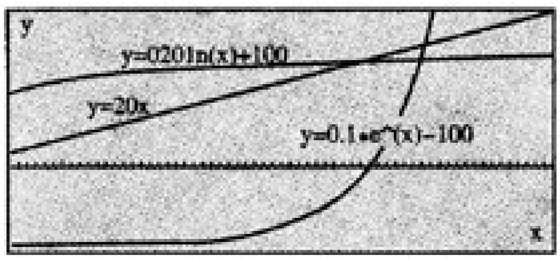
1. y_2.
2. 设第 1 轮病毒发作时有 $a_1=10$ 台被感染，第 2 轮，第 3 轮……依次有 a_2 台，a_3 台……被感染，依题意有

$$a_5=10\times 20^4=160.$$

答：在第 5 轮病毒发作时最多会有 160 万台被感染.

练习（第 119 页）

三个函数图象如下.



由图象可以看到，函数（1）以“爆炸”式的速度增长；函数（2）增长缓慢，并渐渐趋于稳定；函数（3）以稳定的速率增加.

练习（第 123 页）

1.（1）已知人口模型为

$$y=y_0e^{rt},$$

其中 y_0 表示 $t=0$ 时的人口数，r 表示人口的年增长率.

若按 1650 年世界人口 5 亿，年增长率为 0.3%估计，有

$$y=5e^{0.003t}.$$

当 $y=10$ 时，解得 $t\approx 231$.

所以，1881 年世界人口约为 1650 年的 2 倍.

同理可知，2003 年世界人口数约为 1970 年的 2 倍.

（2）由此看出，此模型不太适宜估计跨度时间非常大的人口增长情况.

2. 由题意有

$$75t-4.9t^2=100,$$

解得
$$t=\frac{75\pm 60.5}{2\times 4.9},$$

即　$t_1\approx 1.480$，$t_2\approx 13.827$.

所以，子弹保持在 100 m 以上的时间 $t=t_2-t_1\approx 12.35$，在此过程中，子弹最大速度

$$v_1=v_0-9.8t=75-9.8\times 1.48=60.498\ \text{m/s}.$$

答：子弹保持在 100 米以上高度的时间是 12.35 秒，在此过程中，子弹速度的范围是 $v\in(0,\ 60.498)$.

练习（第 126 页）

1.（1）由题意可得

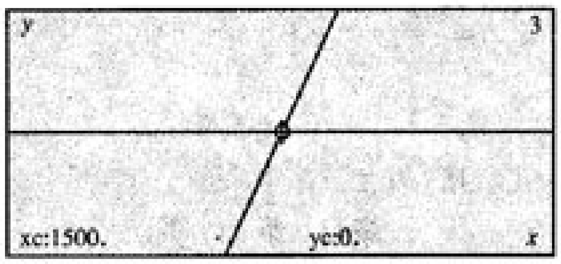
$$y_1=150+0.25x,$$

$$y_2=\frac{150}{x}+0.25,$$

$$y_3=0.35x.$$

$$y_4=0.35x-(150+0.25x)=0.1x-150.$$

（2）画出 $y_4=0.1x-150$ 的图象.



由图象可知，当 $x<1\,500$ 件时，该公司亏损；

当 $x=1\,500$ 件时，公司不赔不赚；

当 $x>1\,500$ 件时，公司赢利.

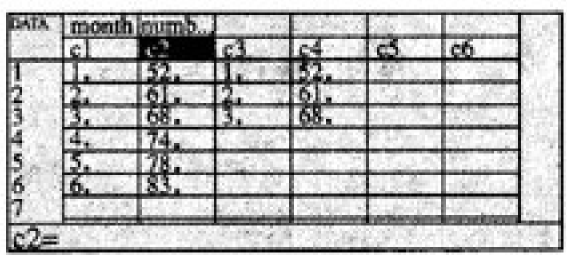
2. 运动员在离开飞机 x s 后下落的距离 y 为

$$y=5x^2.$$

由题意知 $y=1\,600$，解得 $x\approx17.9$.

答：跳伞运动员应在离开飞机后约 17.9 s 时打开降落伞.

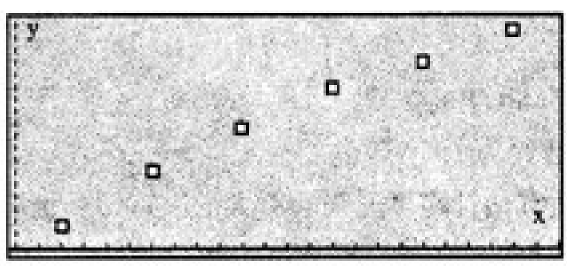
3.（1）列表.



DATA	month	numb...				
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	1.	52.	1.	52.		
2	2.	61.	2.	61.		
3	3.	68.	3.	68.		
4	4.	74.				
5	5.	78.				
6	6.	83.				
7						

c2=

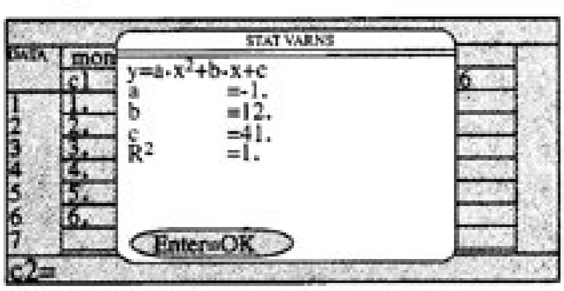
（2）画散点图.

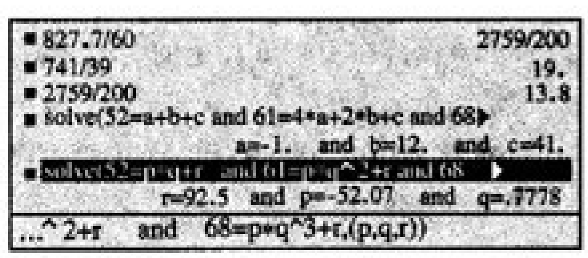


（3）确定函数模型.

甲：$y_1=-x^2+12x+41$，

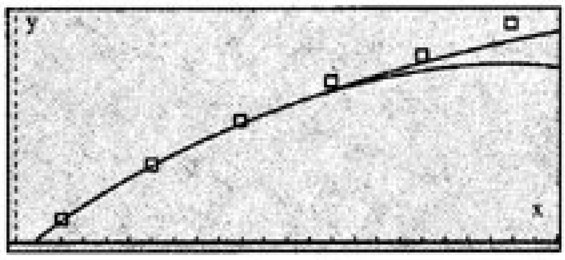
乙：$y_2=-52.07\times0.778^x+92.5$.

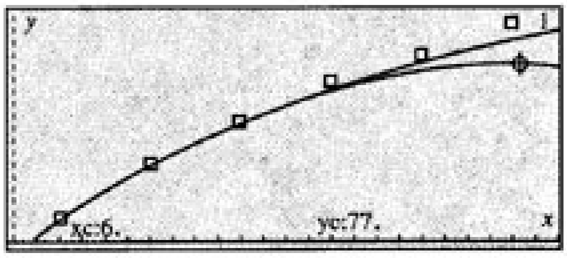


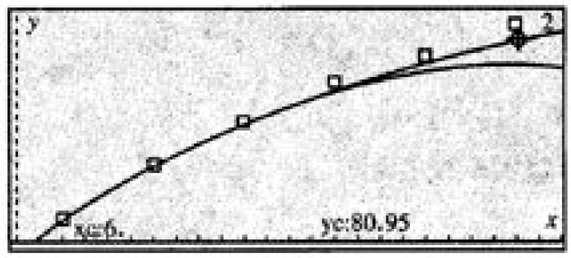


（4）做出函数图象进行比较.

计算 $x=6$ 时，$y_1=77$，$y_2=80.9$，







可见，乙选择的模型较好.

习题 3.2（第 126 页）

A 组

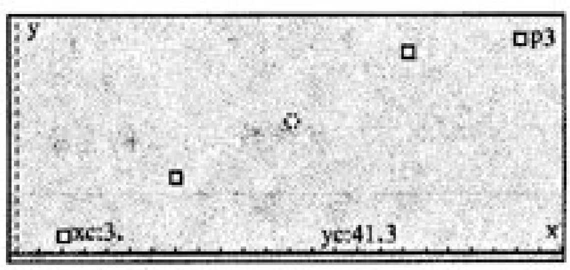
1. “速度与下落的时间成正比”的意见是正确的，由表 1 中的数据可得：距离与速度的平方成正比.

2. (1) 列表.

DATA	d	F				
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	1.	14.2				
2	2.	28.8				
3	3.	41.3				
4	4.	57.5				
5	5.	60.2				
6						
7						

r5c2=60.2

(2) 描点.



(3) 根据点的分布特征，可以考虑以 $d=kf+b$ 作为刻画长度与拉力的函数模型．取两组数据 (1, 14.2)，(4, 57.5) 有

$$\begin{cases}k+b=14.2,\\4k+b=57.5,\end{cases}$$

解得

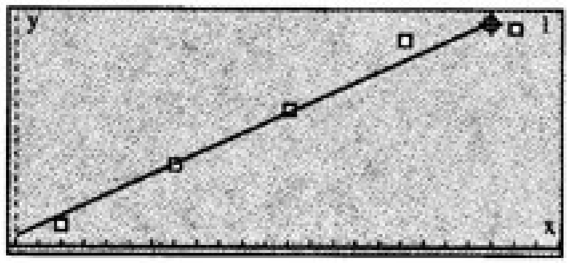
$$\begin{cases}k\approx14.4,\\b\approx-0.2.\end{cases}$$

所以

$$d=14.4f-0.2.$$

将已知数据带入上述解析式，或作出函数图象，可以发现，这个函数模型与已知数据拟合程度较好，说明它能较好地反映长度与拉力的关系.

3. 由 $\frac{20}{10^3}=(60)^2a$ 得 $a=\frac{1}{36\times5\times10^3}$.



由 $\frac{50}{10^3}=\frac{1}{36\times 5\times 10^3}x^2$ 得 $x=30\sqrt{10}$.

因为 $30\sqrt{10}<100$，

所以，这辆车没有超车.

4. (1) $x=\begin{cases}60t, & 0\leqslant t\leqslant \frac{5}{2},\\ 150, & \frac{5}{2}<t\leqslant \frac{7}{2},\\ 150-50\left(t-\frac{x}{2}\right), & \frac{7}{2}<t\leqslant \frac{13}{2}.\end{cases}$

(2) $v=\begin{cases}60, & 0\leqslant t\leqslant \frac{5}{2},\\ 0, & \frac{5}{2}<t\leqslant \frac{7}{2},\\ 50, & \frac{7}{2}<t\leqslant \frac{13}{2}.\end{cases}$

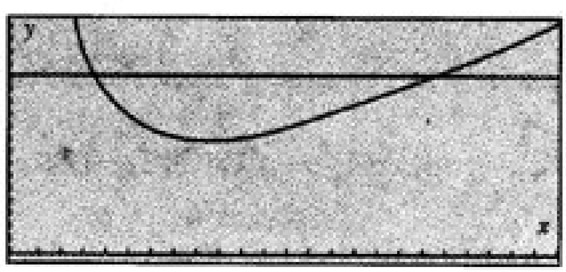
图略.

5. 例如，$f(x)=4-2^{2-x}$.

6. 设水池总造价为 y 元，水池长度 x m，则

$$y=\left(12x+\frac{2\ 400}{x}\right)95+\frac{1\ 200}{6}\times 135,$$

画出函数 $y_1=\left(12x+\frac{2\ 400}{x}\right)95+\frac{1\ 200}{6}\times 135$ 和函数 $y_2=7$ 的图象.



由图可知，若 $y_1\leqslant 7$，则 x 应介于 $[x_1, x_2]$ 之间，x_1，x_2 即为方程

$$\left(12x+\frac{2\ 400}{x}\right)95+\frac{1\ 200}{6}\times 135=70\ 000$$

的两个根.

解得 $x_1\approx 6.4$，$x_2\approx 31.3$.

答：水池的长与宽应该控制在 $[6.4, 31.3]$ 之间.

7. 将 $x=0$，$y=1.01\times 10^5$ 和 $x=2\ 400$，$y=0.90\times 10^5$ 分别代入 $y=ce^{kx}$，得到

$$\begin{cases}c=1.01\times 10^5,\\ 0.90\times 10^5=ce^{2\ 400k},\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c=1.01\times 10^5, \\ k=4.805\times 10^{-5}. \end{cases}$$

所以，$y=1.01\times 10^5 e^{4.805\times 10^{-5}x}$.

当 $x=5\ 596$ m 时，$y=0.772\times 10^5$ (Pa)$<0.775\times 10^5$ (Pa).

答：这位游客的决定是冒险的决定.

8. (1) $y=a\left(\frac{193}{200}\right)^t$；

(2) 当 $\frac{y}{a}=\frac{1}{2}$ 时，有 $\left(\frac{193}{200}\right)^t=\frac{1}{2}$，解得 $t\approx 19.5$.

答：动物死后，体内碳 11 的含量经过 19.5 分钟减少到死前一半.

(3) 碳 11 的衰减速度太快，不便用碳 11 的含量测定古尸的年代.

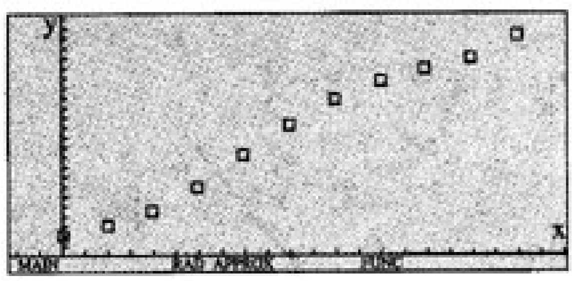
9. 由 $500\leqslant 2\ 500\left(\frac{8}{10}\right)^t<1\ 500$，解得 $2.3<t\leqslant 7.2$.

答：应该在用药 2.3 小时后及 7.2 小时以前补充药.

B 组

1. D.

2. (1) 利用计算器画出 1990～2000 年国内生产总值的图象如下.



(2) 根据以上图象的特征，可考虑用函数

$$y=kx+b$$

刻画国民生产总值发展变化的趋势.

取 (1 994，46 670) (1 998，76 967.1) 两组数据代入上式得

$$\begin{cases} 46\ 670=1\ 994k+b, \\ 76\ 967.1=1\ 998k+b, \end{cases}$$

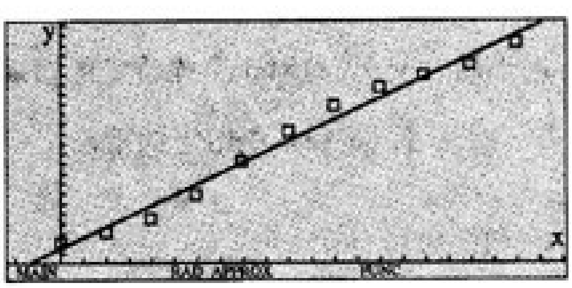
解得

$$\begin{cases} k=7\ 574.275, \\ b=-15\ 056\ 434.35. \end{cases}$$

这样，我们就得到了函数模型

$$y=7\ 574.275\ x-15\ 056\ 434.35.$$

作出上述函数图象如下.



根据上述函数图象，我们发现这个函数模型与已知数据的拟合程度较好，这说明它能较好的反映国民生产总值的发展变化.

(3) 以 $x=2\,004$ 代入以上模型可得 $y=122\,412.75$ 亿元，由此可预测 2004 年的国民生产总值约为 122 412.75亿元.

3. (1) 点 A、B 的实际意义为当乘客量为 0 时，亏损 1（单位）；当乘客量为 1.5 单位时，收支持平；射线 AB 上的点的实际意义为当乘客量小于 1.5 时公司将亏损，当乘客量大于 1.5 时公司将赢利.

(2) 图 2 的建议是：降低成本而保持票价不变；图 3 的建议是：提高票价而保持成本不变.

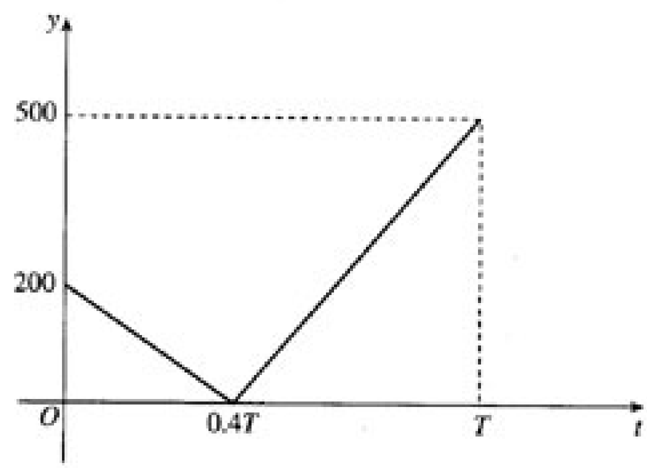
复习参考题（第 132 页）解答

A 组

1. C.
2. C.
3. 设列车从 A 地到 B 地运行时间为 T，经过时间 t 后列车离 C 地的距离为 y，则

$$y=\begin{cases}200-\dfrac{500}{T}t,\ 0\leqslant t\leqslant\dfrac{2T}{5},\\[2mm] \dfrac{500}{T}t-200,\ \dfrac{2T}{5}<t\leqslant T.\end{cases}$$

函数图象为



4. (1) 圆柱形；

(2) 上底小、下底大的圆台形；

(3) 上底大、下底小的圆台形；

(4) 呈下大上小的两节圆柱形.

图略.

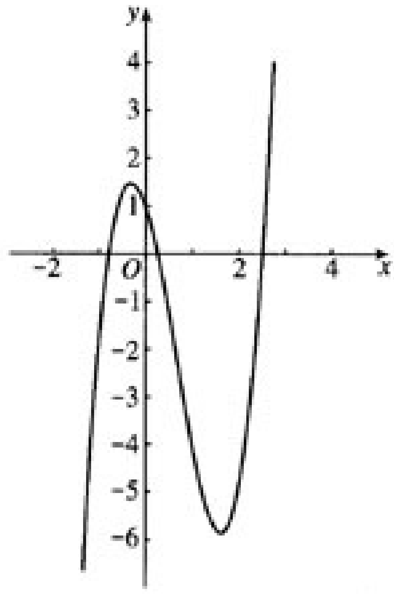
5. (1) 设无理根为 x_0，将 D 等分 n 次后的长度为 d_n. 包含 x_0 的区间为 (a, b)，于是

$$d_1=1,\ d_2=\frac{1}{2},\ d_3=\frac{1}{2^2},\ d_4=\frac{1}{2^3},\ \cdots d_n=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

所以 $|x_0-a|\leqslant d_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，即近似值可精确到 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(2) 由于 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 随 n 的增大而不断地趋向于 0，故对于事先给定的精确度 ε，总有自然数 n，使得 $\dfrac{1}{2^{n-1}}\leqslant\varepsilon$. 所以，只需将区间 D 等分 n 次就可以达到事先给定的精确度 ε. 所以，一般情况下，不需尽可能多地将区间 D 等分.

6. 令 $f(x)=2x^3-4x^2-3x+1$，函数图象如下所示：



（第 6 题）

函数分别在区间（-1，0）、（0，1）和区间（2，3）内各有一个零点，所以方程 $2x^3-4x^2-3x+1=0$ 的最大的根应在区间（2，3）内.

取区间（2，3）的中点 $x_1=2.5$，用计算器可算得 $f(2.5)=-0.25$. 因为 $f(2.5)\cdot f(3)<0$，所以 $x_0\in(2.5, 3)$.

再取（2.5，3）的中点 $x_2=2.75$，用计算器可算得 $f(2.75)\approx 4.09$. 因为 $f(2.5)\cdot f(2.75)<0$，所以 $x_0\in(2.5, 2.75)$.

同理，可得 $x_0\in(2.5, 2.625)$，$x_0\in(2.5, 2.562\,5)$，$x_0\in(2.5, 2.531\,25)$，$x_0\in(2.515\,625, 2.531\,25)$，$x_0\in(2.515\,625, 2.523\,437\,5)$.

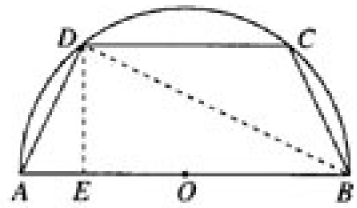
由于

$$|2.523\,437\,5-2.515\,625|=0.007\,812\,5<0.01,$$

此时区间（2.515 625，2.523 437 5）的两个端点精确到 0.01 的近似值都是 2.52，所以方程 $2x^3-4x^2-3x+1=0$ 精确到 0.01 的最大根约为 2.52.

7. 令 $\lg x=\frac{1}{x}$，即得方程 $\lg x-\frac{1}{x}=0$，再令 $g(x)=\lg x-\frac{1}{x}$，用二分法求得交点的横坐标约为 2.5.

8. 如图，做 $DE\perp AB$，垂足为 E. 由已知可得 $\angle ADB=90°$.



（第 8 题）

因为 $AD=x$，$AB=4$，于是

$$AD^2=AE\times AB,$$

即

$$AE=\frac{AD^2}{AB}=\frac{x^2}{4}.$$

所以，$CD=AB-2AE=4-2\times\frac{x^2}{4}=4-\frac{x^2}{2}$.

于是

$$\begin{aligned}y&=AB+BC+CD+AD\\&=4+x+4-\frac{x^2}{2}+x\\&=-\frac{x^2}{2}+2x+8.\end{aligned}$$

由于 $AD>0$，$AE>0$，$CD>0$，所以

$$x>0,\ \frac{x^2}{4}>0,\ 4-\frac{x^2}{2}>0,$$

解得
$$0<x<2\sqrt{2}.$$
所以，所求的函数为
$$y=-\frac{x^2}{2}+2x+8，0<x<2\sqrt{2}.$$

9.（1）由已知可得 $N=N_0\left(\frac{1}{e^\lambda}\right)^t$.

因为 λ 是正常数，$e>1$，所以 $e^\lambda>1$，

即
$$0<\frac{1}{e^\lambda}<1，$$

又 N_0 是正常数，所以 $N=N_0\left(\frac{1}{e^\lambda}\right)^t$ 是关于 t 的减函数.

（2）$N=N_0e^{-\lambda t}$，因为 $e^{-\lambda t}=\frac{N}{N_0}$，所以
$$-\lambda t=\ln\frac{N}{N_0}，$$
即
$$t=-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N}{N_0}.$$

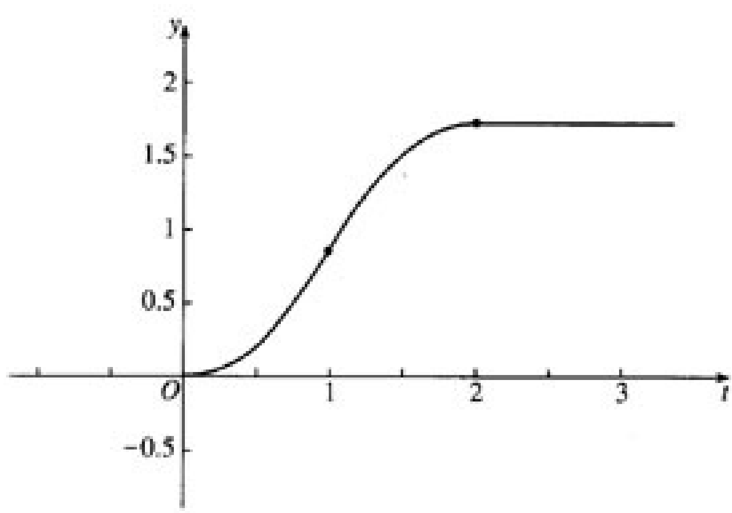
（3）当 $N=\frac{N_0}{2}$ 时，$t=-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N_0}{2N_0}=\frac{1}{\lambda}\ln 2$.

10. 因为 $f(1)=-3+12+8=17>0$，$f(2)=-3\times8+12\times2+8=8>0$，$f(3)<0$，所以，下次生产应在两个月后开始.

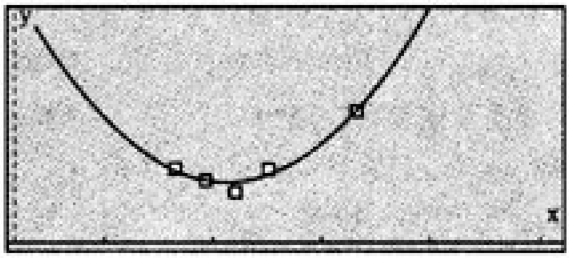
B组

1. 厂商希望的是甲曲线；客户希望的是乙曲线.
2. 函数的解析式为
$$y=f(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}t^2, & 0<t\leqslant1,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)^2+\sqrt{3}, & 1<t\leqslant2,\\ \sqrt{3}, & t>2.\end{cases}$$

函数的图象为



3. (1) 作出所给数据的散点图：



根据散点的分布特征，可考虑以 $y=ax^2+bx+c$ 作为刻画煤气用量与开关旋转角度的函数模型．取三组数据 (45，45)、(52.5，44)、(67.5，45) 代入上式，得出关于系数 a、b、c 的三个方程，求出 a、b、c 的值代入函数模型，得到

$$y=0.0089x^2-x+71.98.$$

作出上述函数的图象，发现这个函数模型与已知数据的拟合程度较好，这说明它能较好的反映煤气用量与开关旋转角度的关系．

(2) 在本实验中，开关旋转角度约为 60 度时煤气用量最少．

Ⅲ 自我检测题

(本检测题可用计算器)

一、选择题（每小题只有一个正确选项）：

1. 方程 $x-1=\lg x$ 必有一个根的区间是（　　）．

(A) (0.1，0.2)　　(B) (0.2，0.3)　　(C) (0.3，0.4)　　(D) (0.4，0.5)

2. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $y=\lg x$ 的图象的交点的横坐标（精确到 0.1）约是（　　）．

(A) 1.3　　(B) 1.4　　(C) 1.5　　(D) 1.6

3. 如果一个立方体的体积在数值上等于 V，表面面积在数值上等于 S，且 $V=S+1$，那么这个立方体的一个面的边长（精确到 0.01）约为（　　）．

(A) 5.01　　(B) 5.08　　(C) 6.03　　(D) 6.05

4. 实数 a、b、c 是图象连续不断的函数 $y=f(x)$ 定义域中的三个数，且满足 $a<b<c$，$f(a)\cdot f(b)<0$，$f(b)\cdot f(c)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, c) 上的零点个数为（　　）．

(A) 2　　(B) 奇数　　(C) 偶数　　(D) 至少是 2

5. 假设银行 1 年定期的年利率为 2%．某人为观看 2008 年的奥运会，从 2001 年元旦开始在银行存款 1 万元，存期 1 年，第二年元旦再把 1 万元和前一年的存款本利和一起作为本金再存 1 年定期存款，以后每年元旦都这样存款，则到 2007 年年底，这个人的银行存款共有（精确到 0.01）（　　）．

(A) 7.14 万元　　(B) 7.58 万元　　(C) 7.56 万元　　(D) 7.50 万元

6. 若方程 $a^x-x-a=0$ 有两个解，则 a 的取值范围是（　　）．

(A) $(1, +\infty)$　　(B) (0，1)　　(C) $(0, +\infty)$　　(D) $\varnothing$

二、填空题：

7. 函数 $y=x^2$ 与函数 $y=x\ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上增长较快的一个是________．

8. 若方程 $x^2-x+1=0$ 在区间 (a,b)（a、b 是整数，且 $b-a=1$）上有一根，则 $a+b$ =________.

9. 某商品进货单价为30元，按40元一个销售，能卖40个；若销售单位每涨1元，销售量减少一个，要获得最大利润时，此商品的售价应该为每个________元.

10. 已知图象连续不断的函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) $(b-a=0.1)$ 上有唯一零点，如果用"二分法"求这个零点（精确到0.000 1）的近似值，那么将区间 (a,b) 等分的次数至多是______.

三、解答题：

11. 截止到1999年底，我国人口约13亿．如果经过30年后，我国人口不超过18亿，那么人口年平均增长率不应超过多少（精确到0.01）？

12. 某地西红柿从2月1日起开始上市．通过市场调查，得到西红柿种植成本 Q（单位：元/10^2 kg)与上市时间 t（单位：天）的数据如下表：

时间 t	50	110	250
种植成本 Q	150	108	150

（1）根据上表数据，从下列函数中选取一个函数描述西红柿种植成本 Q 与上市时间 t 的变化关系.

$$Q=at+b,\ Q=at^2+bt+c,\ Q=a\cdot b^t,\ Q=a\cdot \log_b t.$$

（2）利用你选取的函数，求西红柿种植成本最低时的上市天数及最低种植成本.

参考答案：

一、选择题：

1. A；　2. D；　3. D；　4. D；　5. B；　6. A.

二、填空题：

7. $y=x^2$.

8. -3.

9. 55.

10. 10.

三、解答题：

11. 设人口年平均增长率为 r，经过 x 年后，我国人口数字为 y（亿）.

1999年底，我国人口约13亿；

经过1年（即2000年），人口数为

$$13+13\times r=13(1+r)\ （亿）；$$

经过2年（即2001年），人口数为

$$13(1+r)+13(1+r)\times r=13(1+r)^2\ （亿）；$$

经过3年（即2002年），人口数为

$$13(1+r)^2+13(1+r)^2\times r=13(1+r)^3\ （亿）；$$

……

所以，经过 x 年，人口数为

$$y=13(1+r)^x（亿）.$$

当 $x=30$ 时，若 $y=18$，则有

$$18=13(1+r)^{30},$$

由计算器解得 $r\approx 0.01$.

所以，当人口年平均增长率不超过1%时，经过30年后，我国人口数字不超过18亿.

12. (1) 由提供的数据知道，描述西红柿种植成本 Q 与上市时间 t 的变化关系的函数不可能是常数函数，从而用函数 $Q=at+b$，$Q=a\cdot b^t$，$Q=a\cdot\log_b t$ 中的任意一个进行描述时都应有 $a\neq 0$，而此时上述三个函数均为单调函数，这与表格所提供的数据不吻合．所以，选取二次函数 $Q=at^2+bt+c$ 进行描述.

以表格所提供的三组数据分别代入 $Q=at^2+bt+c$，得到

$$\begin{cases}150=2\,500a+50b+c,\\108=12\,100a+110b+c,\\150=62\,500a+250b+c.\end{cases}$$

解上述方程组得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{200},\\b=-\dfrac{3}{2},\\c=\dfrac{225}{2}.\end{cases}$

所以，描述西红柿种植成本 Q 与上市时间 t 的变化关系的函数为

$$Q=\frac{1}{200}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{225}{2}.$$

(2) 当 $t=-\dfrac{-\frac{3}{2}}{2\times\left(\frac{1}{200}\right)}=150$ 天时，西红柿种植成本最低为

$$Q=\frac{1}{200}\cdot 150^2-\frac{3}{2}\cdot 150+\frac{225}{2}=100\ (元/10^2\,\text{kg}).$$

IV 拓展资源

1. 在测量某物理量过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 a_1，a_2，…，a_n 共 n 个数据，我们规定所测量的物理量的“最佳近似值” a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小．依此规定，从 a_1，a_2，…，a_n 推出的 $a=$________.

解：由“最佳近似值”的含义可知，a 就是使 $(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ 取得最小值时的 x.

令 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2=n(x-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-\frac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2$，根据二次函数的性质，可知当 $x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 时，y 取最小值.

所以，$a=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

2. 某工厂今年1月、2月、3月生产某种产品的数量分别是1、1.2、1.3万件，为了估测以后每个月的产量，以这三个月的产品数量为依据，用一个函数模拟该产品的月产量 y 与月份 x 的关系，模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=ab^x+c$（其中 a，b，c 为常数）．已知4月份该产品的产量为1.37

万件，请问用以上哪个函数作为模拟函数较好，并说明理由.

解：根据题意，该产品的月产量 y 是月份 x 的函数，可供选用的函数有两种，其中哪一种函数确定的 4 月份该产品的产量愈接近于 1.37 万件，哪种函数作为模拟函数就较好，故应先确定这两个函数的具体解析式.

设 $y_1=f(x)=px^2+qx+r$（p，q，r 为常数，且 $p\neq0$），$y_2=g(x)=ab^x+c$，根据已知有

$$\begin{cases}p+q+r=1,\\4p+2q+r=1.2,\\9p+3q+r=1.3,\end{cases}\text{和}\begin{cases}ab+c=1,\\ab^2+c=1.2,\\ab^3+c=1.3,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}p=-0.05,\\q=0.35,\\r=0.7.\end{cases}\text{和}\begin{cases}a=-0.8,\\b=0.5,\\c=1.4.\end{cases}$$

所以，$f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7$，$g(x)=-0.8\times0.5^x+1.4$.

所以，$f(4)=1.3$，$g(4)=1.35$.

显然 $g(4)$ 更接近于 1.37，故选用 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$ 作为模拟函数较好.

3. 某工厂在甲、乙两地的两个分厂各生产某种机器 12 台和 6 台．现销售给 A 地 10 台，B 地 8 台．已知从甲地调动 1 台至 A 地、B 地的运费分别为 400 元和 800 元，从乙地调运 1 台至 A 地、B 地的费用分别为 300 元和 500 元.

（1）设从乙地调运 x 台至 A 地，求总费用 y 关于台数 x 的函数解析式；

（2）若总运费不超过 9 000 元，问共有几种调运方案；

（3）求出总运费最低的调运方案及最低的费用.

解：由甲、乙两地调运至 A、B 两地的机器台数及费用（元）如下表.

调出地	甲地		乙地	
调至地	A 地	B 地	A 地	B 地
台数	$10-x$	$12-(10-x)$	x	$6-x$
每台运费	400	800	300	500
运费合计			$300x$	
	$400(10-x)$	$800[12-(10-x)]$		$500(6-x)$

（1）依题意得

$$y=400(10-x)+800[12-(10-x)]+300x+500(6-x),$$

即

$$y=200(x+43)(0\leqslant x\leqslant6,\ x\in\mathbf{Z}).$$

（2）由 $y\leqslant9\ 000$，解得 $x\leqslant2$.

因为 $x\in\mathbf{Z}$，$0\leqslant x\leqslant6$，所以 $x=0$，1，2.

答：共有三种调运方案.

（3）由一次函数的单调性知，当 $x=0$ 时，总运费 y 最低，$y_{\min}=8\ 600$（元）.

答：从乙地调 6 台给 B 地，甲地调 10 台给 A 地，调 2 台给 B 地的调运方案的总运费最低，最低运费为 8 600 元.

4. 北京市的一家报刊摊点，从报社买进《北京日报》的价格是每份 0.20 元，卖出的价格是每份 0.30 元，卖不掉的报纸可以以每份 0.05 元的价格退回报社．在一个月（30 天计算）里，有 20 天每天可卖出 400 份，其余 10 天每天只能卖出 250 份，但每天从报社买进的份数必须相同，这个摊主每天从

报社买进多少份，才能使每月所获的利润最大？并计算他一个月最多可赚得多少元？

分析：若设每天从报社买进 $x(250\leqslant x\leqslant 400,\ x\in\mathbf{N})$ 份，则每月共可销售（$20x+10\times 250$）份，每份可获利润 0.10 元，退回报社 $10(x-250)$ 份，每份亏损 0.15 元，建立月纯利润函数 $f(x)$，再求 $f(x)$ 的最大值，便可获得一个月的最大利润.

解：设每天从报社买进 x 份报纸，每月获得的总利润为 y 元，则依题意有

$$\begin{aligned}y&=0.10(20x+10\times 250)-0.15\times 10(x-250)\\&=0.5x+625,\ x\in[250,\ 400].\end{aligned}$$

因为函数 y 在 $[250,\ 400]$ 上单调递增，所以 $x=400$ 时，$y_{\max}=825$（元）.

答：摊主每天从报社买进 400 份时，每月所获得的利润最大，最大利润为 825 元.

5. 东方旅社有 100 张普通客床，若每床每夜收租费 10 元时，客床可以全部租出；若每床每夜收费提高 2 元，便减少 10 张客床租出；若再提高 2 元，便再减少 10 张客床租出．依此情况变化下去．为了投资少而获租金最多，每床每夜应提高租金多少元？

分析：投资少而所获租金最多，就是租出的床位要少而获得的利润最大.

解：设每床每夜提高租费 x 元，则可租出（$100-10x$）张客床，设可获利润 y 元，依题意有

$$y=(10+2x)(100-10x),$$

即

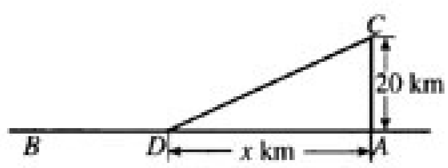
$$y=-20\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+1\ 125.$$

因为 $x\in\mathbf{N}$，$x=2$ 或 $x=3$ 时，$y_{\max}=1\ 120$.

当 $x=2$ 时，需租出床 80 张；当 $x=3$ 时，需租出床 70 张，所以，$x=3$ 时的投资小于 $x=2$ 时的投资.

答：每床每夜提高租费 6 元时，既投资少又能获得最高租金.

6. 如图，铁路线上 AB 段长 100 km，工厂 C 到铁路的距离 CA 为 20 km. 现要在 AB 上某一点 D 处，向 C 修一条公路，已知铁路每吨千米的运费与公路每吨千米的运费之比为 3∶5. 为了使原料从供应站 B 运到工厂 C 的运费最少，D 点应选在何处？



（第 7 题）

分析：据题设知，单位距离的公路运费大于铁路运费，又知 $|BD|+|DC|\leqslant|BA|+|AC|$，因此只有点 D 选在线段 BA 上某一适当位置，才能使总运费最省．若设 D 点距 A 点 x km，从 B 到 C 的总运费为 y，建立 y 与 x 的函数，则通过确定函数 $y=f(x)$ 的最小值，即可确定点 D 的位置.

解：设 $|DA|=x$ km，铁路吨千米运费为 $3a$，公路吨千米运费为 $5a$，从 B 到 C 的总运费为 y，则依题意得

$$y=3a(100-x)+5a\sqrt{400+x^2},\ x\in(0,\ 100),$$

即 $\dfrac{y-300a}{a}=5\sqrt{400+x^2}-3x$.

令 $t=\dfrac{y-300a}{a}$，则有 $t+3x=5\sqrt{400+x^2}$.

平方，整理，得 $16x^2-6tx+10\ 000-t^2=0$.

由 $\Delta=36t^2-4\times 16(10\ 000-t^2)\geqslant 0$，得 $|t|\geqslant 80$.

因为 $t>0$，所以 $t\geqslant 80$.

将 $t=80$ 代入方程 1，得 $x=15$，这时 t 最小，y 最小.

即当 D 点选在距 A 点 15 km 处时，总运费最省.

7. 某厂生产一种机器的固定成本（即固定投入）为 0.5 万元，但每生产一台，需要增加可变成本（即另增加投入）0.25 万元．市场对此产品的年需求量为 500 台，销售的收入函数为 $R(x)=5x-\frac{x^2}{2}$（万元）（$0\leqslant x\leqslant 5$），其中 x 是产品售出的数量（单位：百台）．

（1）把利润表示为年产量的函数；

（2）年产量是多少时，工厂所得利润最大？

（3）年产量是多少时，工厂才不亏本？

分析：利润 $y=$ 收入 $R(x)-$ 成本 $C(x)$（固定＋可变），且 x 是以百台为单位，$x\leqslant 5$ 时，产品全部售出；$x>5$ 时，只能售出 500 台．工厂不亏本，利润 $y\geqslant 0$.

解：（1）利润

$$y=R(x)-C(x)=\begin{cases}-0.5+4.75x-\frac{x^2}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 12-0.25x, & x>5.\end{cases}$$

（2）若 $0\leqslant x\leqslant 5$，则 $y=-0.5+4.75x-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{2}(x-4.75)^2+\frac{1}{2}\times 4.75^2-0.5$，

所以，当 $x=5$ 时，y 有最大值 10.75 万元；

若 $x>5$，则 $y=12-0.25x$ 是减函数，所以，当 $x=6$ 时，y 有最大值 10.50 万元.

综上可得，年产量为 500 台时，工厂所得利润最大.

（3）当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，由 $y\geqslant 0$，即 $-0.5+4.75x-\frac{x^2}{2}\geqslant 0$，解得 $0<x\leqslant 5$，$x\in\mathbf{Z}$；

当 $x>5$ 时，$y\geqslant 0$，即 $12-0.25x\geqslant 0$，解得 $5<x\leqslant 48$.

综上可得，当年产量 x 满足 $1\leqslant x\leqslant 48$，$x\in\mathbf{Z}$ 时，工厂不亏本.

8. 某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴．设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克，政府补贴为 t 元/千克．根据市场调查，当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时，淡水鱼的市场日供产量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系：

$$P=1\,000(x+t-8),\ x\geqslant 8,\ t\geqslant 0,$$

$$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2},\ 8\leqslant x\leqslant 14.$$

当 $P=Q$ 时的市场价格称为市场平衡价格.

（1）将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域；

（2）为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少为每千克多少元？

解：（1）由 $1\,000(x+t-80)=500\sqrt{40-(x-80)^2}$，解得

$$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}.$$

由 $\begin{cases}50-t^2\geqslant 0,\\ 8\leqslant 8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14,\end{cases}$ 及 $\begin{cases}50-t^2\geqslant 0,\\ 8\leqslant 8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14,\end{cases}$

解得 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{10}$.

所以，函数 $x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$，定义域是[0，10].

（2）令 $8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 10$，得 $t^2-4t-5\geqslant 0$.

又因为 $t\geqslant 0$，所以 $t\geqslant 1$.

答：政府补贴至少为每千克 1 元.